# Sistemas de Ecuaciones Lineales

## Bloque de Contenidos N° 4

**Ing. Mixaida Peña**

# Sistemas de Ecuaciones Lineales

⌘ Identificación de un Sistema Lineal

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3$$
$$.$$
$$.$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n$$

Una ecuación Lineal en n variables donde $a_{ij}$ y c son constantes

Matriz de coeficientes

Matriz de variables

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ . & . & . \;\ldots\; . \\ . & . & . \;\ldots\; . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

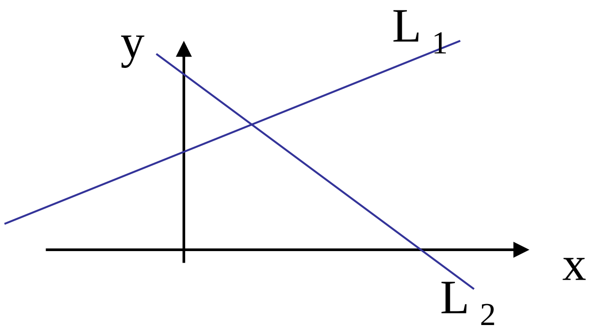
Tamaño

Problema:

El n° total de pasajeros matutinos de cierta línea de autobuses urbanos es de 1000. Si el pasaje de niños cuesta 25 centavos, el de adultos 75 centavos y el ingreso total fue de $650 ¿Cuántos niños y adultos utilizaron el autobús en la mañana? (Tan, 1998)

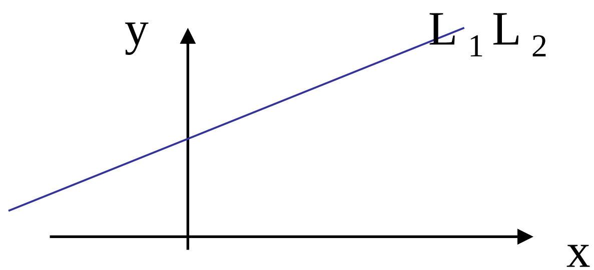
# Sistemas de Ecuaciones Lineales

Si el número de ecuaciones es mayor o igual que el número de variables en un sistema lineal, entonces una de las siguientes posibilidades es cierta:



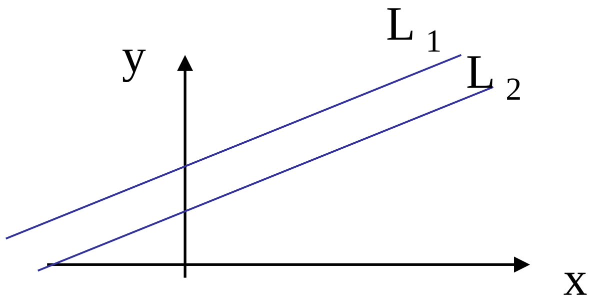

Una única solución

$$2x - y = 1$$
$$3x + 2y = 12$$




Una infinidad de soluciones

$$2x - y = 1$$
$$6x - 3y = 3$$




Sin solución

$$2x - y = 1$$
$$6x - 3y = 12$$

El renglón de la matriz aumentada solo contiene ceros a la izquierda de la recta vertical y una entrada distinta de ceros a la derecha

# Matrices

## Tipos de _Matrices

**Matriz Cero**

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

**Matriz Triangular**

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 \end{pmatrix}$$

**Matriz Renglón/ Vector Renglón**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \end{pmatrix}_{1xn}$$

**Matriz Identidad**

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

**Matriz Diagonal**

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 \end{pmatrix}$$

**Matriz Cuadrada**

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3x3}$$

**Matriz Transpuesta**

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$P^t = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} 2x2$$

**Matriz Columna/ Vector Columna**

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{mx1}$$

# Matriz Inversa

- **Definición**: " Sea A una matriz cuadrada de tamaño n. Una matriz cuadrada $A^{-1}$ de tamaño n tal que:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

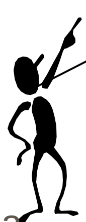
$A^{-1}$ es la inversa de A"(Tan, 1998)

- **Cálculo**:

Dada la matriz $A_{n \times n}$:

1. Agregar la matriz Identidad de tamaño n a fin de obtener la matriz aumentada $[A | I]$.
2. Usar una serie de operaciones de renglón para reducir $[A | I]$ a la forma $[I | B]$, donde la matriz inversa es B . Si la matriz A no se reduce, entonces B no existe

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA$$



La adjunta de A, es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores de A.

# Determinación de la Solución a un Sistema de Ecuaciones

- Método de Eliminación de Gauss-Jordan

Matriz de coeficientes

Matriz de constantes

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & & b_2 \\ . & . & . & \ldots & . & & . \\ . & . & . & \ldots & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & & b_n \end{array}\right)$$

Matriz Aumentada

PASO # 1

Matriz en Forma Reducida por Renglones

Ultimo paso

1.Cada renglón que solo tenga ceros está debajo de todos los renglones que tienen entradas distintas de cero.

2.La primera entrada distinta de cero en cada renglón es 1.

3. En dos renglones sucesivos (distintos de cero), el 1 principal del renglón inferior queda a la derecha del 1 principal del renglón superior.

4. Si una columna contiene un 1 principal, las demás entradas de esa columna son ceros

# Determinación de la Solución a un Sistema de Ecuaciones

- Operaciones que permiten transformar un sistema dado en otro equivalente (Operaciones del método de eliminación de Gauss-Jordan/Operaciones de renglones)

1. Intercambiar dos ecuaciones (renglones) cualquiera.
2. Reemplazar una ecuación (renglón) con un múltiplo constante (distinto de cero) de ella misma.
3. Reemplazar una ecuación (renglón) con la suma de dicha ecuación y un múltiplo constante de cualquier otra ecuación (renglón)

- Notación para las operaciones de renglón:

Si Ri es el i-ésimo renglón de una matriz, se escribe:

Operación 1: Ri $\longleftrightarrow$ Rj significa intercambiar el renglón i por el renglón j

Operación 2: a Ri significa reemplazar el renglón i con la multiplicación del renglón Ri por la constante a.

Operación 3: Ri +a Rj significa reemplazar el renglón i con la suma del renglón i y a veces el renglón j

# Determinación de la Solución a un Sistema de Ecuaciones

“**Eliminación Gaussiana**: Reducir la matriz de coeficientes a la forma escalonada, despejar la última incógnita y luego usar sustitución hacia atrás para despejar a las otras incógnitas” (Grossman, 1988)

# Solución de un sistema de Ecuaciones
## (Matriz Inversa)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A\,X = B$$

- Si AX=B es un Sistema Lineal de n ecuaciones en n incógnitas, y si $A^{-1}$ existe, entonces:

$$X = A^{-1} B$$

# Operaciones entre Matrices

## ⌘ Suma (Resta)

Supongase que A y B son dos matrices del mismo tamaño

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & . & a_{3n} \\ . & . & \dots & . & . \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & . & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & . & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & . & b_{3n} \\ . & . & \dots & . & . \\ . & . & \dots & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & . & b_{mn} \end{pmatrix}_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & . & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & . & a_{2n} \pm b_{2n} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{31} & \dots & . & a_{3n} \pm b_{3n} \\ . & . & \dots & . & . \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & . & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Si A, B y C son matrices del mismo tamaño, entonces:

1. A +B =B +A
2. (A+ B) +C = A+ (B +C)
3. A+ **O** = **O** +A=A
4. $(A+ B)^t = A^t + B^t$

# Operaciones entre Matrices

- Producto por un escalar

$$c*\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & . & a_{3n} \\ . & . & \dots & . & . \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & . & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & . & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & . & ca_{2n} \\ ca_{31} & ca_{32} & \dots & . & ca_{3n} \\ . & . & \dots & . & . \\ . & . & \dots & . & . \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & . & ca_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Si A, B y **O** son del mismo tamaño, y c1,c2 y c3 escalares, entonces:

1. C1 (A+B)= c1A + c1B
2. (c1 + c2)A= c1A + c2A
3. c1 * c2A= (c1 c2) A
4. 0A= **O**
5. C1 **O= O**
6. $(AB)^t = B^t A^t$

Problema:

Las ventas de un comerciante de vehículos para enero y febrero fueron:

$$E = \begin{array}{r} \\ Rojo \rightarrow \\ Azul \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} Fort & Chevrolet \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Obtener la matriz que represente las ventas totales para cada color y modelo en los dos meses.

# Operaciones entre Matrices

⌘ Multiplicación de matrices.

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2x3} * \begin{pmatrix} \mathbf{b_{11}} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ \mathbf{b_{21}} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \mathbf{b_{31}} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}_{3x4} = \begin{pmatrix} \mathbf{c_{11}} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}_{2x4}$$

Si los productos y sumas están definidos para las matrices A,B y C, entonces:

1. (AB)C=A(BC)

2.A(B+C)=AB+ AC

3. (A +B)C= AC+ BC

Problema:

Un agente de bolsa vendió a un cliente 200 acciones tipo A, 300 tipo B, 500 tipo C.Los precios por acción de A, B, C son $100, $150, $200 respectivamente. Obtener el costo total

# Determinantes

Definición:

- Si A=($a_{11}$) es una matriz cuadrada de orden **n=1**, entonces $|\mathbf{A}|$ **=** $\mathbf{a_{11}}$
- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden **n= 2**,

entonces $|\mathbf{A}|$ **=** $\mathbf{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$

- Si A es una matriz cuadrada de orden **n>2**, se selecciona cualquier renglón (o columna) de A y se multiplica cada entrada del renglón (columna) por su cofactor.

  El cofactor $c_{ij}$ de la entrada $a_{ij}$ de A es igual $c_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$

  Menor= Sea A una matriz de nxn y sea $M_{ij}$ la matriz de (n-1)x (n-1) que resulta al eliminar el -iésimo fila y la j-ésima columna de A.

# Matriz Insumo- Producto

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & \frac{\textit{Consumidores}}{\textit{Industria A}} & \frac{(\textit{insumos})}{\textit{Industria B}} & \textit{Demanda Final} & \textit{Totales} \\
\hline
\text{Pr}\,\textit{oductores}(\text{Pr}\,\textit{oducto}) & & & & \\
\textit{Industria A} & 240 & 500 & 460 & 1200 \\
\textit{Industria B} & 360 & 200 & 940 & 1500 \\
\textit{otros factores}_{\substack{de \\ produccion}} & 600 & 800 & - & \\
\hline
\textit{Totales} & 1200 & 1500 & &
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c}
A \\ \\ B \\ \hline \\ \textit{Otros}
\end{array}
\begin{pmatrix}
\frac{240}{1200} & \frac{500}{1500} \\
\frac{360}{1200} & \frac{200}{1500} \\
\frac{600}{1200} & \frac{800}{1500}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1/5 & 1/3 \\
3/10 & 2/15 \\
1/2 & 8/15
\end{pmatrix}
$$

Coeficientes de Insumo- Producto

"El análisis insumo- producto nos permite estimar la producción total de cada sector industrial cuando existe un cambio en la demanda final mientras la estructura básica de la economía permanece constante" (Richard y Ernest, 1997)

# Matriz Insumo- Producto

$$Valor_{Total_{dela_{produccionA}}} = Valor_{\substack{Consumido\\porA}} + Valor_{\substack{Consumido\\porB}} + Valor_{\substack{Consumido\\porDF}}$$

$$x_A = \frac{x_A}{5} + \frac{x_B}{3} + 500$$

$$x_B = \frac{3x_A}{10} + \frac{2x_B}{15} + 1200$$

$$\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/3 \\ 3/10 & 2/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix}$$

Matriz de
de demandas internas /
Matriz de Tecnología

Matriz de Producción ← **X =(I- A)$^{-1}$ C** → Matriz de Demanda Final

Matriz de Leontief

$$\boxed{x = (I - A)^{-1} C = \begin{pmatrix} 1404{,}49 \\ 1870{,}79 \end{pmatrix}}$$