

# La Función Primera y Segunda Derivada de una Función Real en una Variable Real

## Bloque de Contenidos N° 1

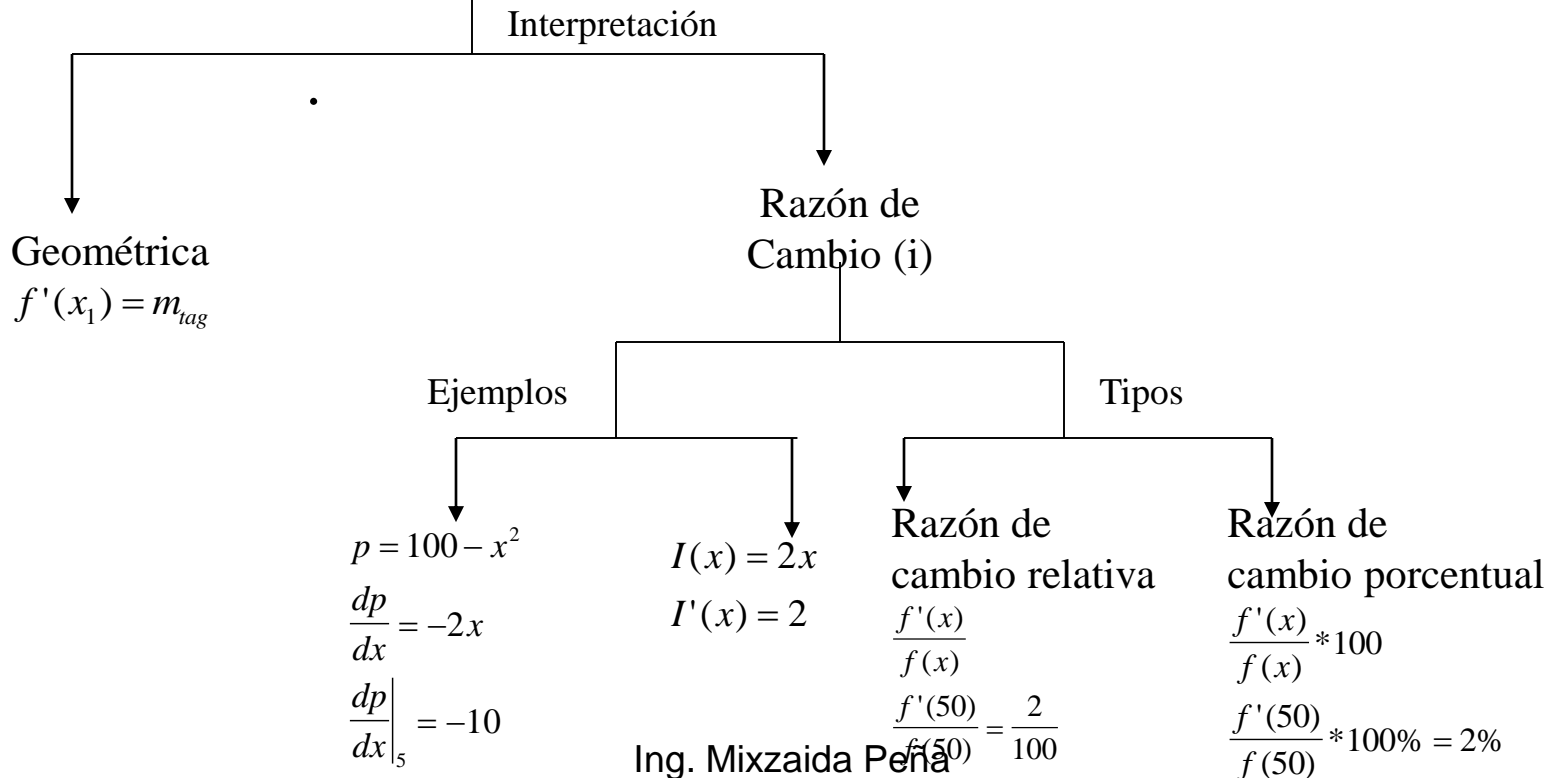


Realizado por:  
Ing. Mixzaida Peña

# Derivada de una Función Real

## Definición

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \longrightarrow \text{Existencia del lím}$$



# Derivada Laterales

Si la función  $f$  está definida en  $x_1$ , entonces la derivada por la derecha (izquierda) de  $f$  en  $x_1$ , representada por  $f'_{\pm}(x_1)$  está definida como:

$$f'_{+}(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$f'_{-}(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 - \Delta x) - f(x_1)}{-\Delta x}$$

- Si la función  $f$  en un intervalo abierto que contiene a  $x_1$  es diferenciable en  $x_1$  si y solo si:

$$f'_{+}(x_1) = f'_{-}(x_1) = f'(x_1)$$

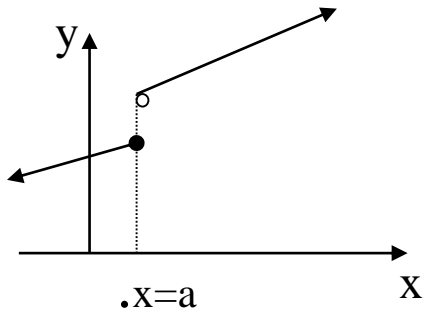
# Diferenciabilidad y continuidad

## Teorema

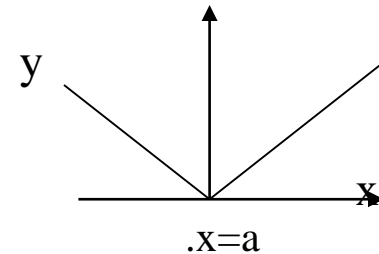
Si  $f$  es diferenciable en  $x = a$

Entonces

$f$  es continua en  $x = a$ .



F no es  
diferenciable  
en  $x = a$



# Reglas de derivación

$$1. \frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$2. \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$3. \frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x); c = \text{constante}$$

$$4. \frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

$$5. \frac{d}{dx}[f(x) * g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$6. \frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

$$g(x) \neq 0$$

7. *Regla de cadena*

$$\text{Si } h(x) = g[f(x)]$$

Entonces:

$$h'(x) = \frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$$

Si

$$y = h(x)g(u)$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$



u es función

diferenciable de x

y es función

diferenciable de u

.y es

diferenciable de x

# Reglas de derivación

$$8. \frac{d}{dx}(u^n) = n * u^{n-1} \frac{du}{dx}; n = n^{\circ} \text{ rea}$$

$$9. \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} * \frac{du}{dx}$$

$$10. \frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{(\ln a)u} * \frac{du}{dx}$$

$$11. \frac{d}{dx}(e^u) = e^u * \frac{du}{dx}$$

$$12. \frac{d}{dx}(a^u) = a^u (\ln a) \frac{du}{dx}$$

$$13. \frac{d}{dx}(\text{Sen } \alpha) = \text{Cos } \alpha$$

$$14. \frac{d}{dx}(\text{Cos } \alpha) = -\text{Sen } \alpha$$

$$15. \frac{d}{dx}(\text{tg } \alpha) = \text{Sec}^2 \alpha$$

$$16. \frac{d}{dx}(\text{Co tg } \alpha) = -\text{Co sec}^2 \alpha$$

$$17. \frac{d}{dx}(\text{Sec } \alpha) = \text{Sec } \alpha \text{ Tg } \alpha$$

$$18. \frac{d}{dx}(\text{Co sec } \alpha) = -\text{Co sec } \alpha \text{ Co tg } \alpha$$

$$19. \frac{d}{dx}(\text{Sen}^{-1}u) = \frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}; -1 < u < 1$$

$$20. \frac{d}{dx}(\text{Cos}^{-1}u) = -\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}; -1 < u < 1$$

$$21. \frac{d}{dx}(\text{Tg}^{-1}u) = \frac{du/dx}{1+u^2}$$

$$22. \frac{d}{dx}(\text{Cot}^{-1}u) = -\frac{du/dx}{1+u^2}$$

$$23. \frac{d}{dx}(\text{Sec}^{-1}u) = \frac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}; |u| > 1$$

$$24. \frac{d}{dx}(\text{Co sec}^{-1}u) = -\frac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}; |u| > 1$$



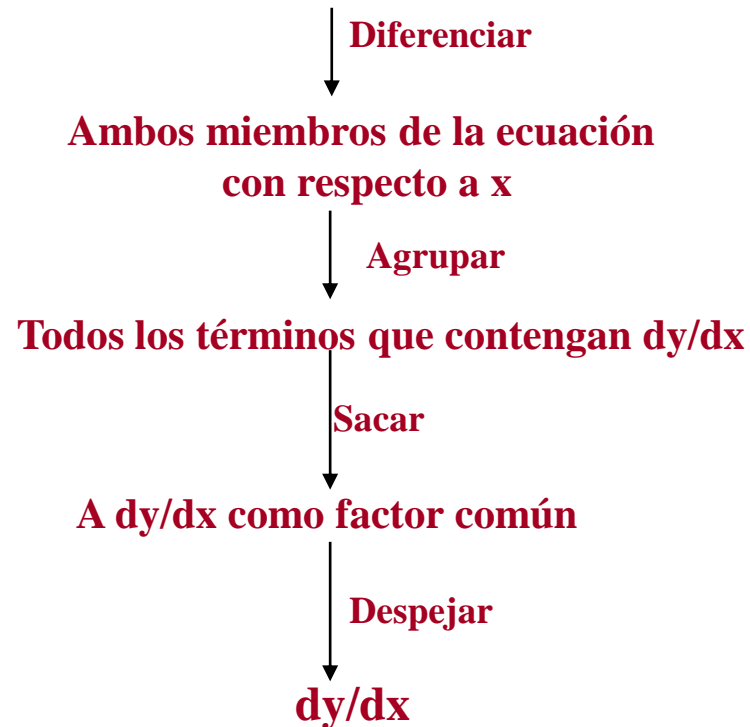
# Derivada de una Función Inversa

Si  $f$  es continua y monótona en  $[a,b]$ , y sea  $y=f(x)$ . Si  $f$  es diferenciable en  $[a,b]$  y  $f'(x) \neq 0$  para toda  $x$  en  $[a,b]$ , entonces la derivada de la función inversa  $f^{-1}$ , definida por  $x= f^{-1}(y)$  está dada por:

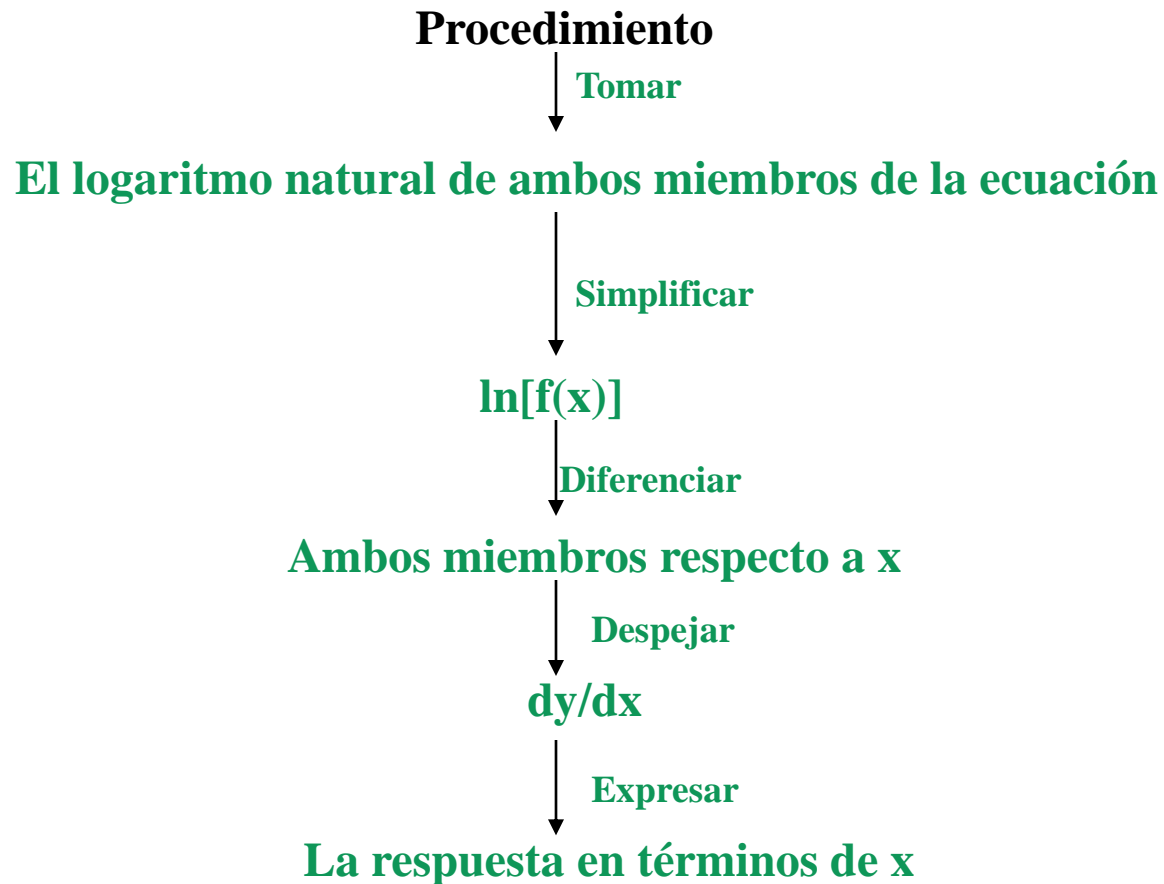
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

# Derivación Implícita

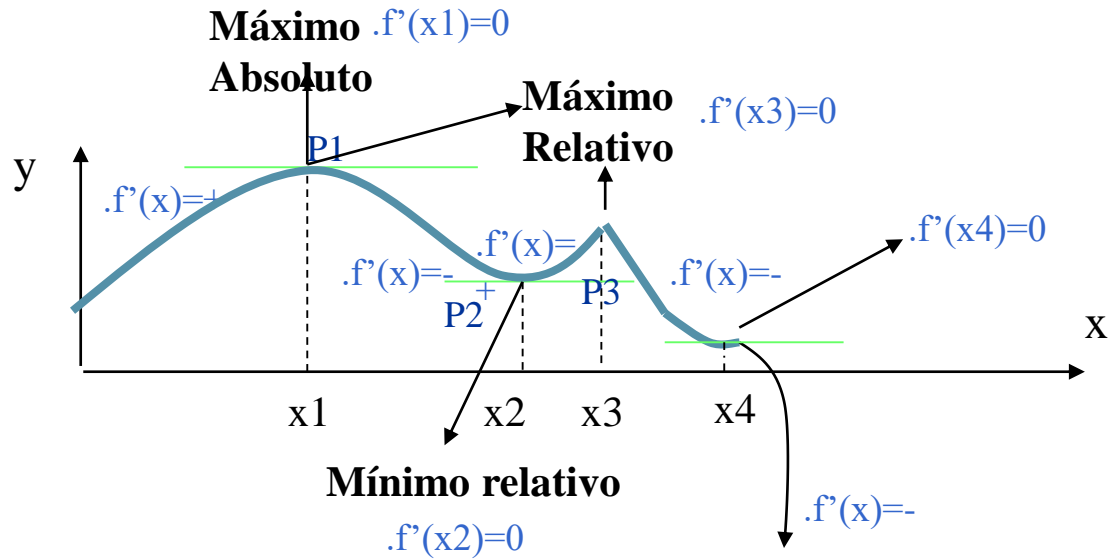
## Procedimiento



# Derivación Logarítmica



# Trazado de Curvas



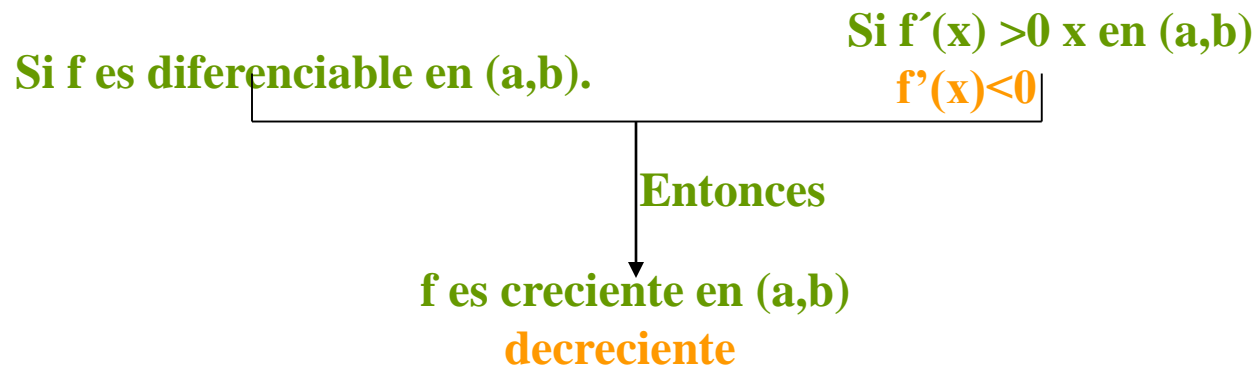
# Monotonía de una Función

## Definiciones

“Se dice que una **función es creciente** en el intervalo  $I$  si para dos números  $x_1, x_2$ , en  $I$ , donde  $x_1 < x_2$ , entonces  $f(x_1) < f(x_2)$ .”  
(Richard y Ernest, 1997, p.647)

“ Se dice que una **función es decreciente** en el intervalo  $I$  si para dos números  $x_1, x_2$  en  $I$ , donde  $x_1 < x_2$ , entonces  $f(x_1) > f(x_2)$ ”

## Teoremas





# Monotonía de una Función

## *Determinación*

### *Determinar*

**Todos los valores de  $x$  para los cuales  $f'(x)=0$  o  $f'$  es discontinua**

### *Identificar*

**Los intervalos abiertos determinados por estos puntos**

### *Elegir*

**Un punto de prueba  $x=c$  en cada intervalo**

### *Establecer*

**El signo de  $f'(x)$**

# Máximos y Mínimos Absolutos

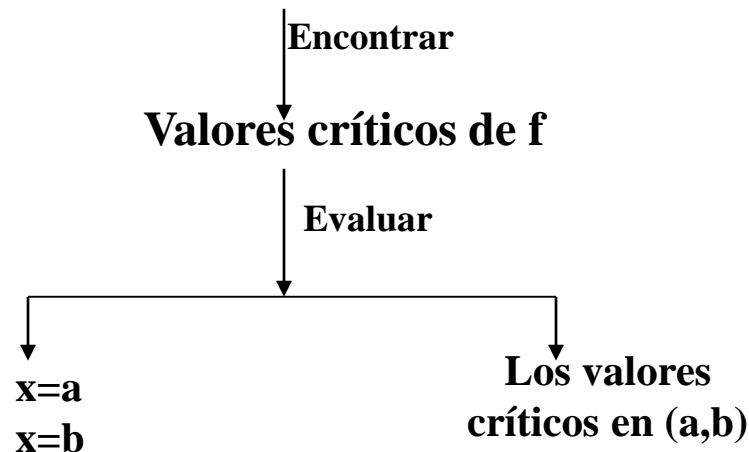
(Extremos Absolutos)

## Definiciones

“Se dice que  $x_0$  es un **máximo absoluto** si  $f(x_0) \geq f(x)$  para todo  $x$  en el dominio de  $f$ ” (Richard y Ernest, 1997, p.649 )

“Se dice que  $x_0$  es un **mínimo absoluto** si  $f(x_0) \leq f(x)$  para todo  $x$  en el dominio de  $f$ ”

## Determinación en $[a,b]$



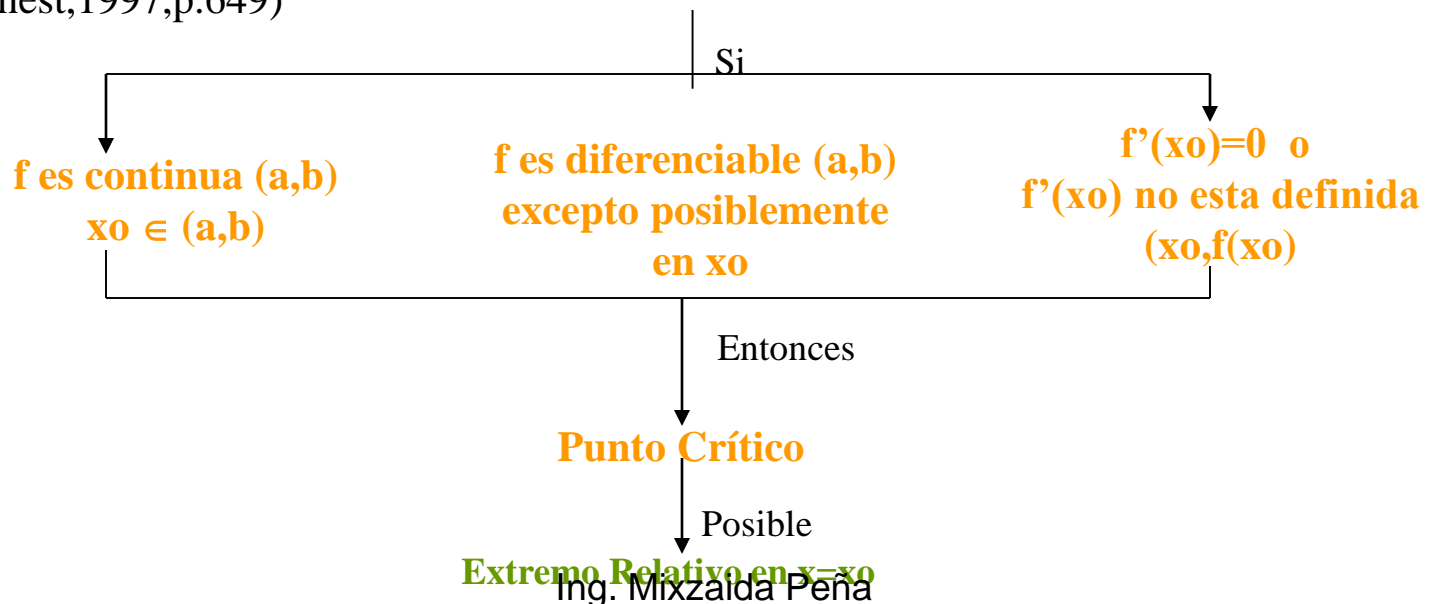
# Máximos y Mínimos Relativos

## (Extremos Relativos)

### Definiciones

“Se dice que  $x_0$  es un **máximo relativo** si existe un intervalo abierto que contenga a  $x_0$ , sobre el cual  $f(x_0) \geq f(x)$  para todo  $x$  en el intervalo” (Richard y Ernest, 1997, p.649)

“Se dice que  $x_0$  es un **mínimo relativo** si existe un intervalo abierto que contenga a  $x_0$ , sobre el cual  $f(x_0) \leq f(x)$  para todo  $x$  en el intervalo”

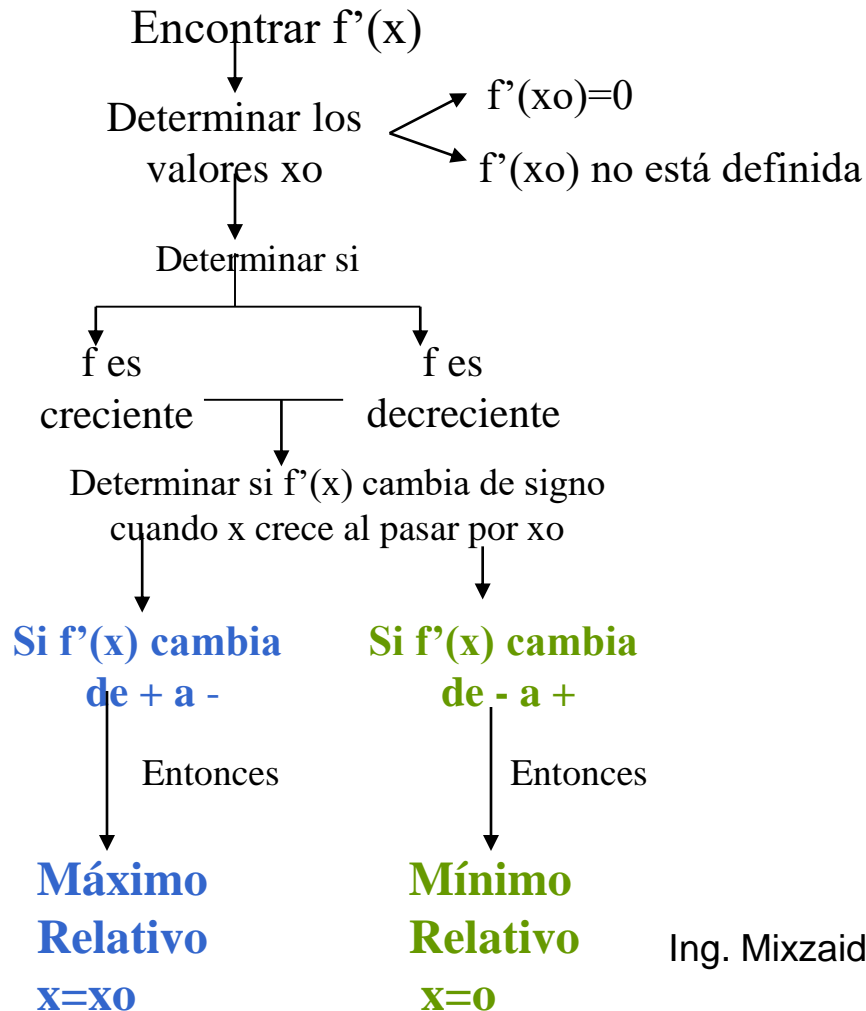


Ing. Mixzalda Peña

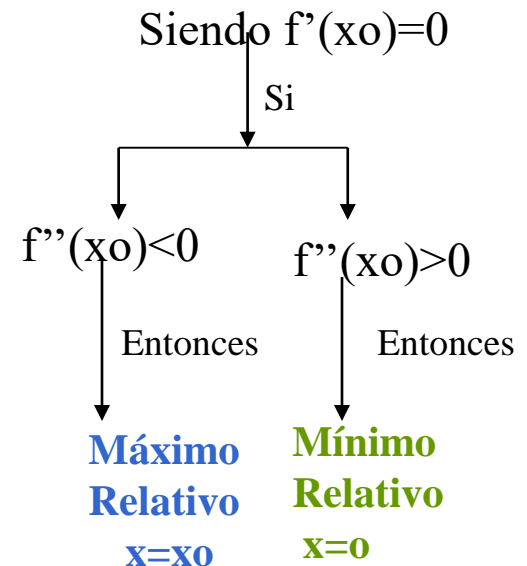
# Máximos y Mínimos Relativos

## (Extremos Relativos:Determinación)

### Criterios de la primera derivada



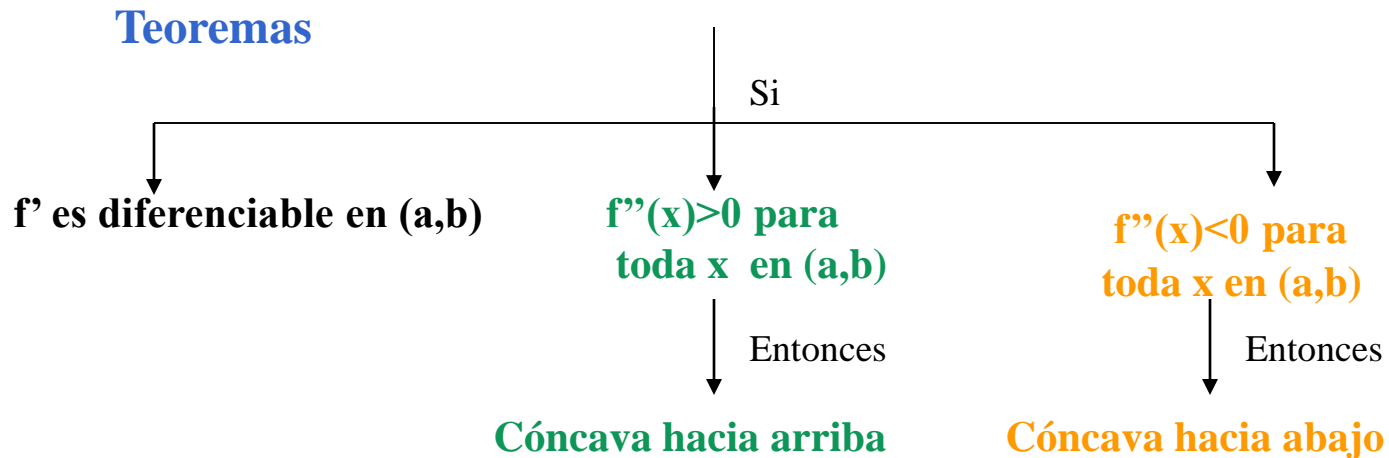
### Criterios de la segunda derivada



# Intervalos de Concavidad y Convexidad

## Definición

“Sea  $f$  diferenciable sobre el intervalo  $(a,b)$ . Se dice entonces que  $f$  es cóncava hacia arriba (**cóncava hacia abajo**) sobre  $(a,b)$  si  $f'(x)$  es creciente (**decreciente**) sobre  $(a,b)$ ”(Tan, 1998, p. 605)





# Intervalos de Concavidad y Convexidad

## *Determinación*

*Determinar*

Todos los valores de  $x$  para los cuales  
 $f''(x)=0$  o  $f''$  es discontinua

*Identificar*

Los intervalos abiertos  
determinados por estos puntos

*Elegir*

Un punto de prueba  $x=c$  en cada  
intervalo

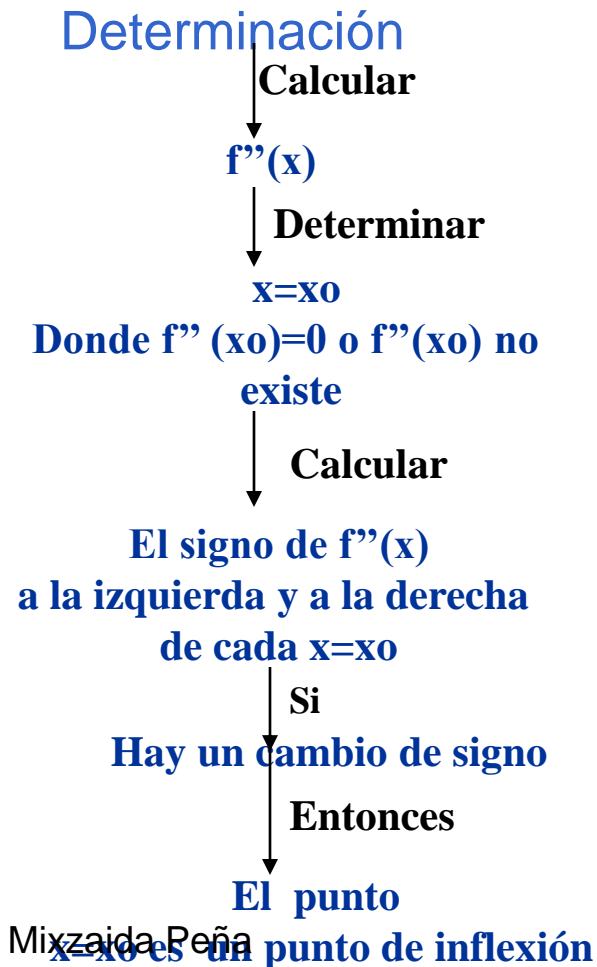
*Establecer*

El signo de  $f''(x)$ .  
Si  $f''(c)>0$ ,  $f$  es cóncava hacia arriba en  $(a,b)$   
Si  $f''(c)<0$ ,  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(a,b)$

# Puntos de inflexión

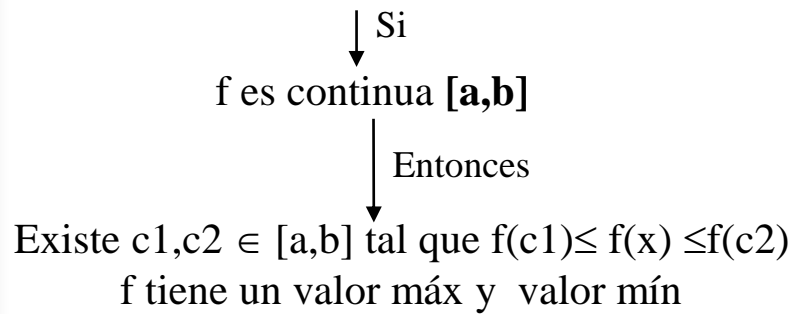
## *Definición.*

Se dice que  $x=x_0$  es un **punto de inflexión** si y solo si  $f$  es continua en  $x_0$  y  $f$  cambia de concavidad.

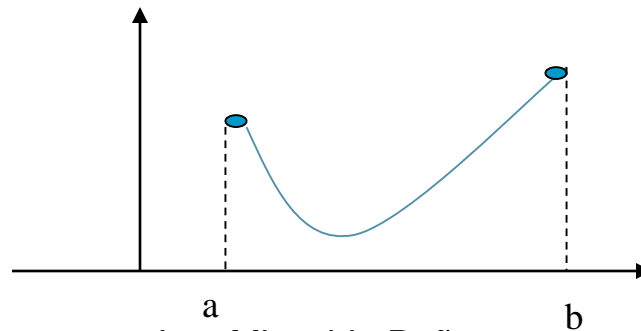
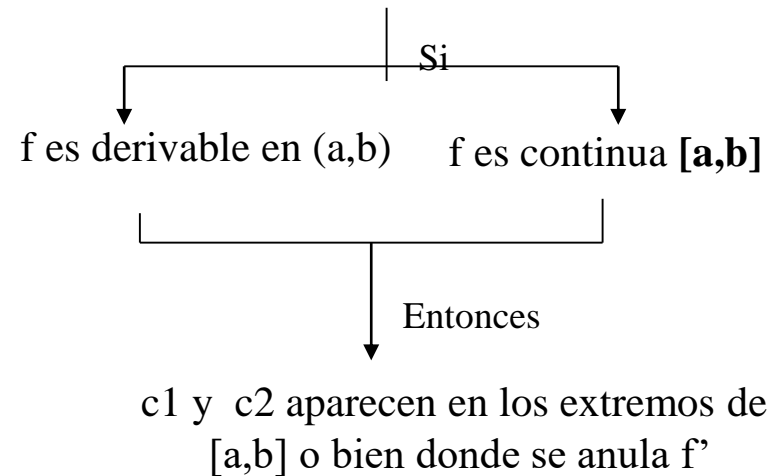


# Teoremas

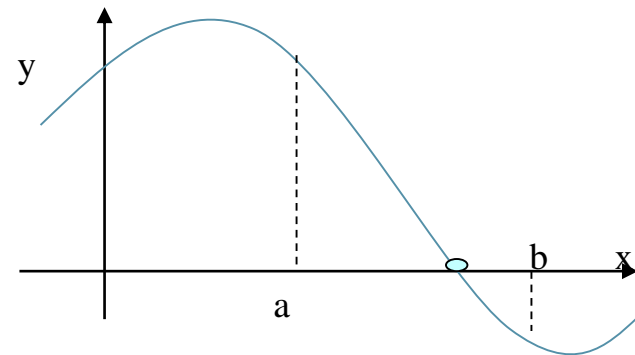
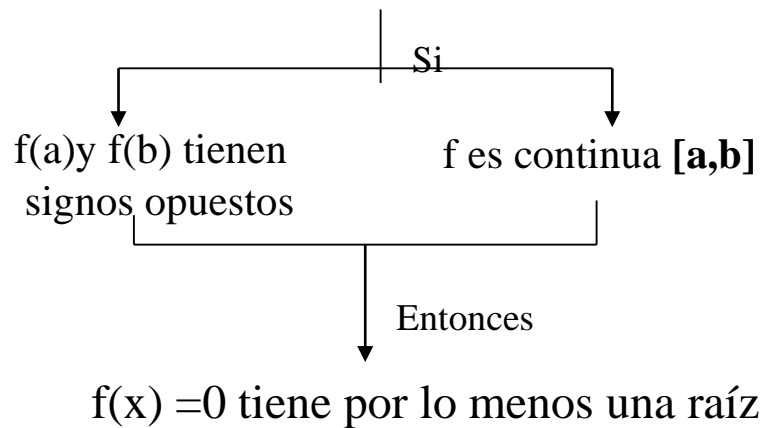
## Teorema del Valor Extremo



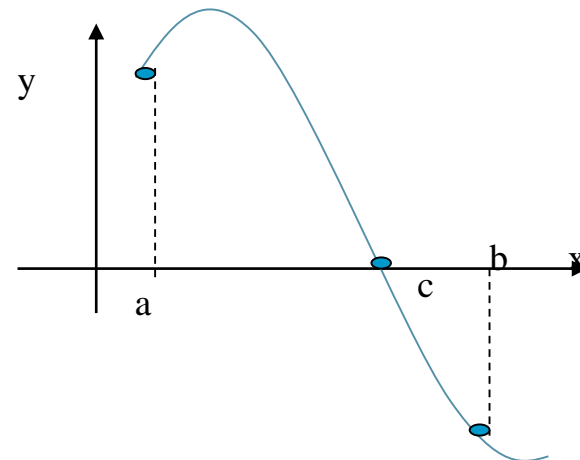
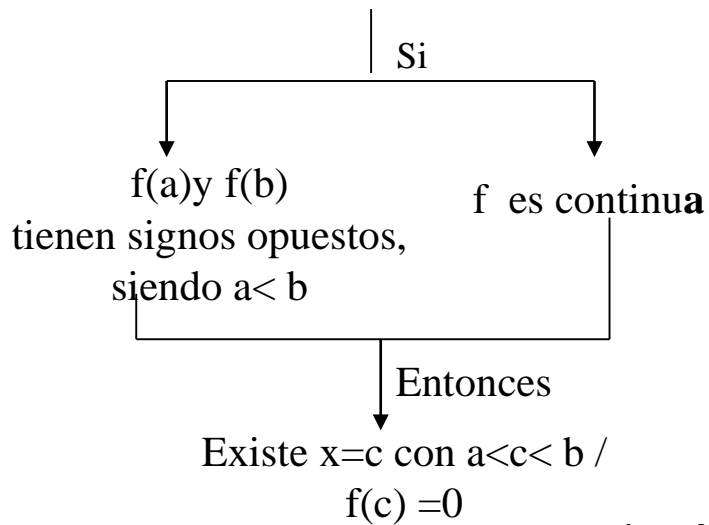
## Teorema del Valor Extremo



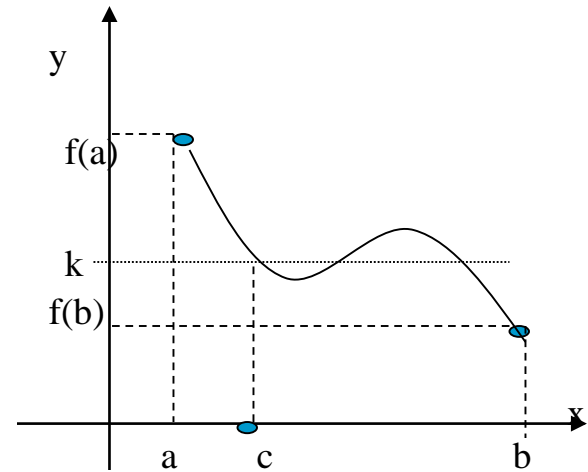
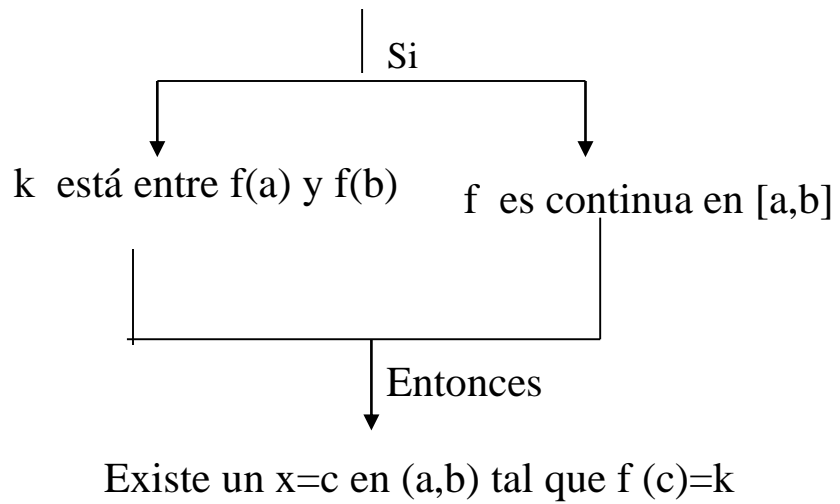
## Teorema



## Teorema de Bolzano

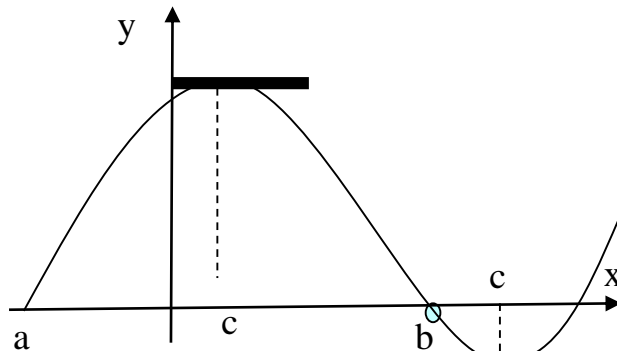
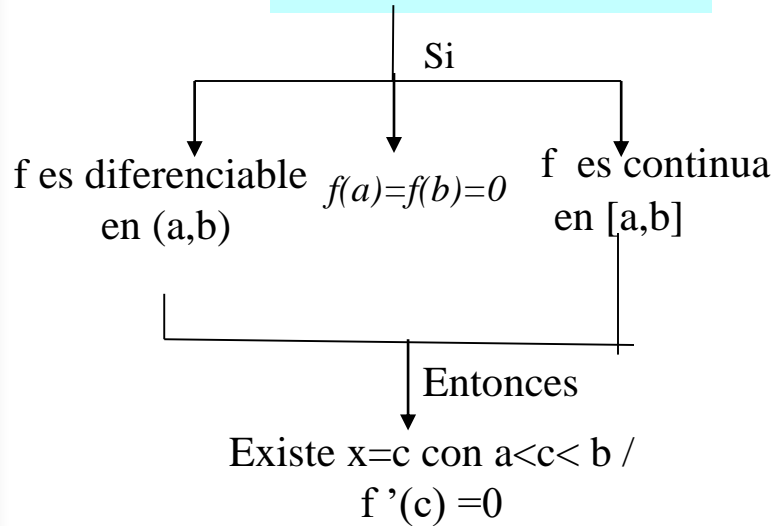


## Teorema de Valor intermedio

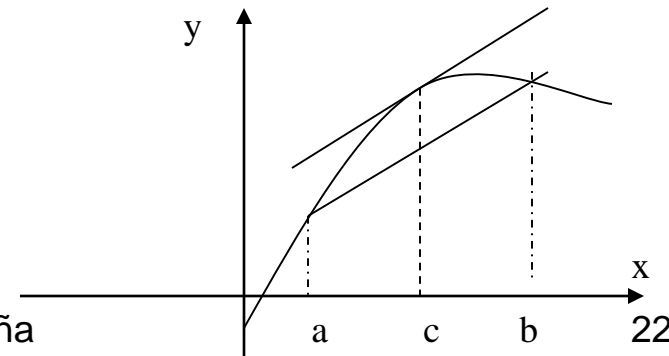
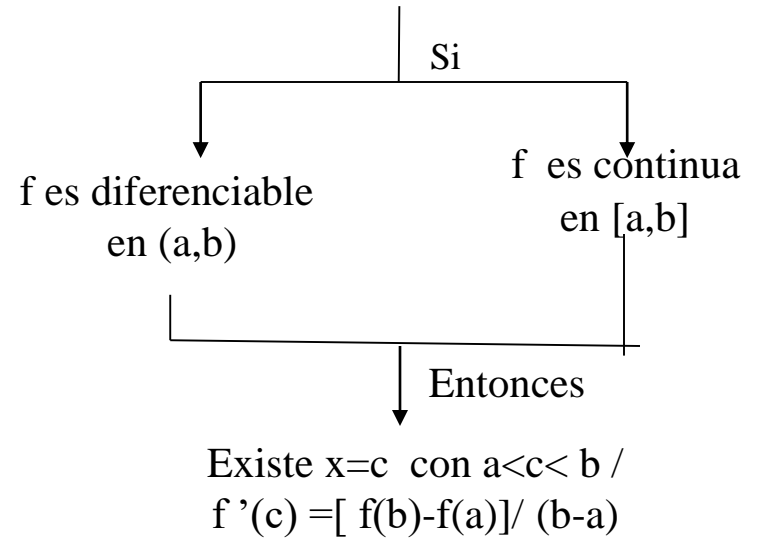


# Teoremas

## Teorema de Rolle

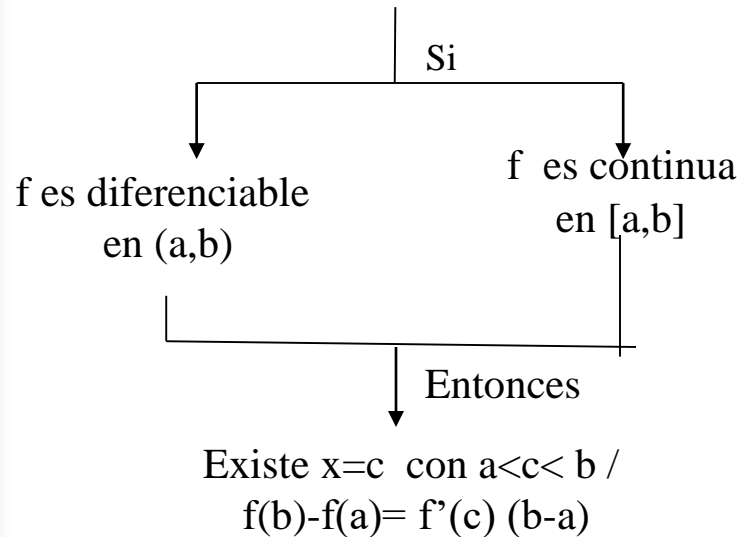


## Teorema del Valor Medio

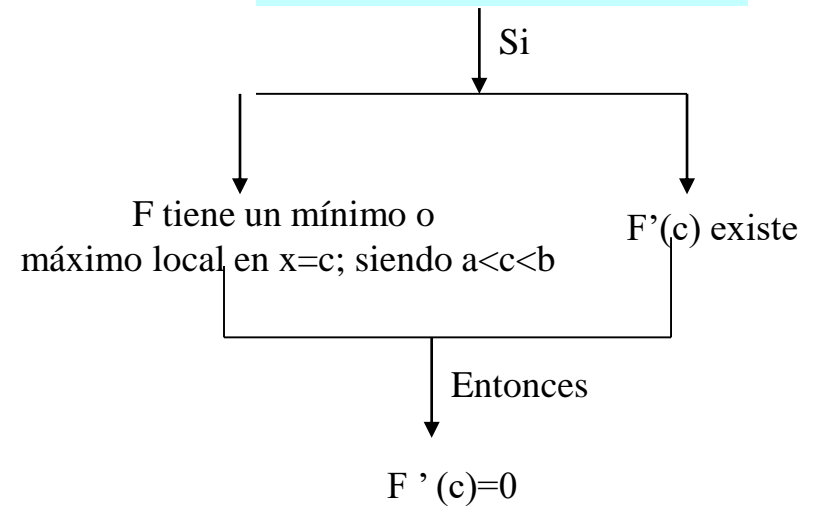


# Teoremas

## Teorema de Lagrange



## Teorema de Fermat



# Problemas

## Construcción de curvas

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

## Problemas de fenómenos naturales y técnicos:

1. Un hombre quiere hacer un jardín rectangular en el patio trasero de su casa y dispone de 50 pies de material para cercarlo. Cuál es el tamaño más grande que puede hacer con el jardín?  
(Tan, 1998, p. 649 ).

# La derivada en el Análisis Marginal



## Bloque de Contenidos N° 2

**Realizado por:  
Ing. Mixzaida Peña**

# Función de Costo

- *Costo Fijos.*

$C(0)$ =Costos Fijos.

$$CF = b$$

- *Costos Variables.*

$$CV = mx$$

- *Costo Total*

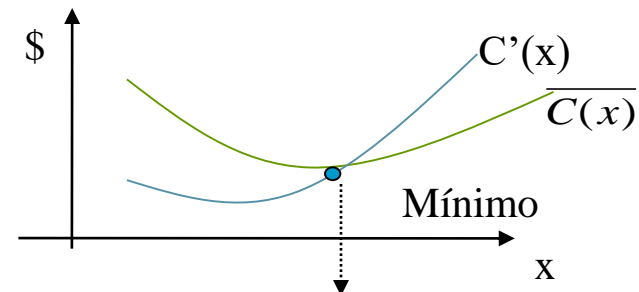
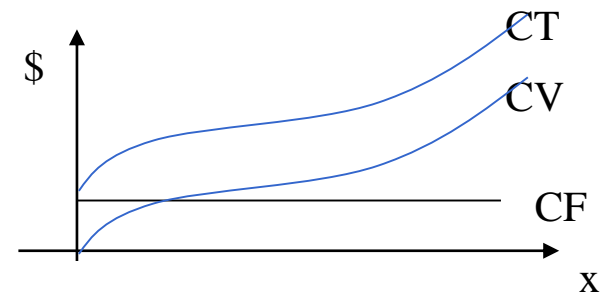
$$C(x) = CF + CV$$

$$C(x) = b + mx$$

- *Costo Medio.*

$$\overline{C(x)} = \frac{C(x)}{x}$$

*Elaboración e interpretación de curvas*



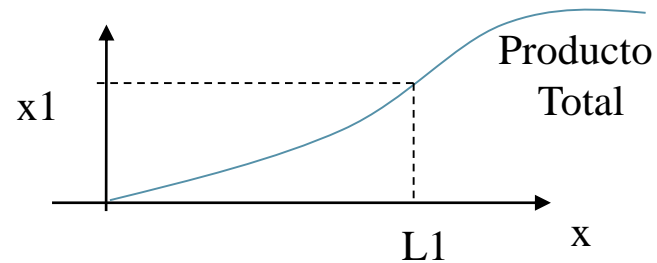
La mercancía está siendo producida al mínimo costo unitario promedio

# Función de Costo

- *Costo Marginal*

$$C'(x) = \frac{dc}{dx}$$

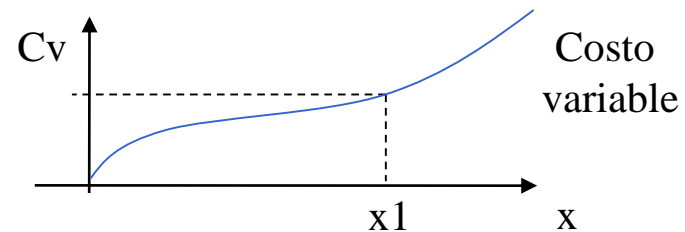
$C'(x) > 0$  . El costo total debe incrementarse cuando el número de unidades aumenta



- *Costos Mínimos*

$$C'(x) = \frac{dc}{dx} = 0$$
$$C''(x) > 0$$

- *Costo Efectivo*



# Función de Costo

## *Problemas:*

1. La función de costo total de un fabricante está dada por  $C(x) = \frac{x^2}{4} + 3x + 400$

$$C(x) = 8000 + 200x - 0,2x^2; 0 \leq x \leq 400$$

$$C(x) = 400 + 20x$$

1.1 Para que nivel de producción será el costo promedio por unidad mínimo?

1.2. ¿Cual es el costo total mínimo?

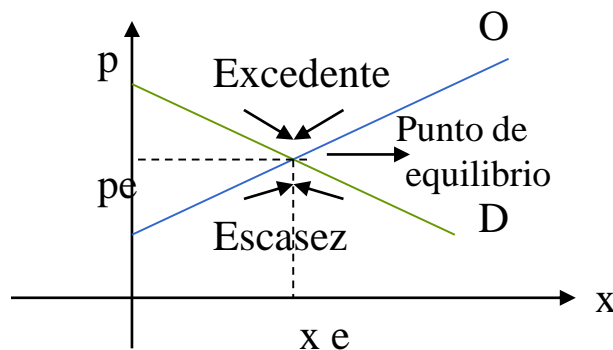
1.3.¿Cuál es el costo real de la producción de la pieza n° 251?.

1.4.¿Cual es la razón de cambio del costo total con respecto a x cuando x=250?

1.5.Hallar la función costo promedio marginal?

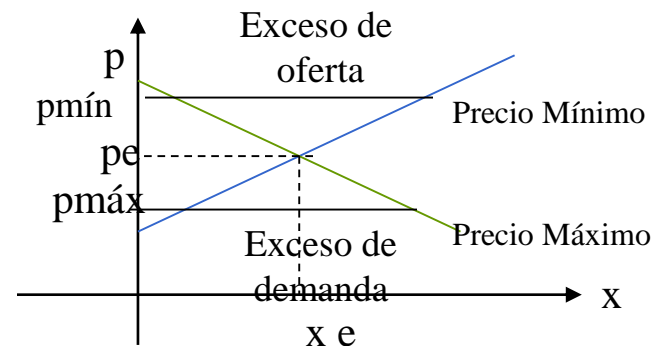
# Oferta y Demanda

- Oferta
- Demanda
- Punto de Equilibrio



## Problemas

“Suponga que la demanda semanal de un producto es de 100 unidades, cuando el precio unitario es de Bs. 58,00, y de 200 unidades, cuando el precio unitario es de 51,00 Bs.. Si la función demanda es lineal, determínela”. (Ruiz, 1993, p 80)



# Ingreso



## ■ Ingreso total

$$I(x) = px$$

## ■ Ingreso Medio

$$\overline{I(x)} = \frac{I(x)}{x} = p$$

## ■ Ingreso Marginal.

$$I'(x) = \frac{d(I(X))}{dx}$$

## ■ Ingreso Máximo

$$I'(x) = \frac{d(I(X))}{dx} = 0$$

$$I''(x) < 0$$

### Problema

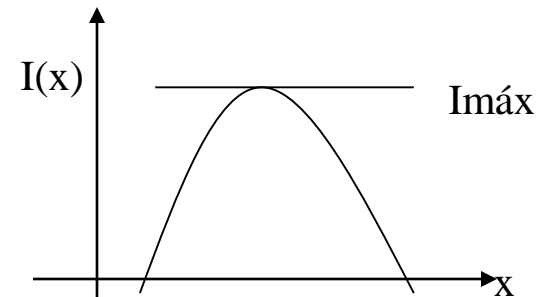
1. La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = (80 - x)/4; \quad 0 \leq x \leq 80.$$

$$P = -0,02x + 400; \quad 0 \leq x \leq 20000$$

1.1 Para que valor de  $x$  se tendrá un ingreso máximo?

1.2. ¿Cual es el ingreso máximo?



# Elasticidad

- Elasticidad de la Demanda (Oferta).

Ecuación=

$\eta$  = Variación porcentual en la cantidad demandada (ofrecida) / Variación porcentual en el precio

$$\eta = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Cálculo Exacto = Elasticidad Puntual de la demanda (oferta)

$$\eta = \frac{\frac{p}{x}}{\frac{dp}{dx}}$$

- Cálculo de la Demanda Elástica, Inelástica y Unitaria

$$|\eta| > 1 \text{ Demanda}_{elastica}$$

$$|\eta| = 1 \text{ Demanda}_{unitaria}$$

$$|\eta| < 1 \text{ Demanda}_{inelastica}$$

$$\frac{dI}{dx} = p \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right)$$

El  $I(x)$  crece si la demanda es elástica pero disminuye si la demanda es inelástica

# Elasticidad

- **Elasticidad del Ingreso**

Ecuación

$$\eta = \frac{\frac{x}{I(x)}}{\frac{dx}{dI(x)}}$$

## Problema

La demanda del queso está relacionada con el precio de la leche por:  $x = 4p + 120$ . Determine la elasticidad de la demanda siendo  $p = 25$ . (UNA, 1986)

# Utilidad o Beneficio



- **Beneficio o Utilidad Total.**  
Determinación de la función

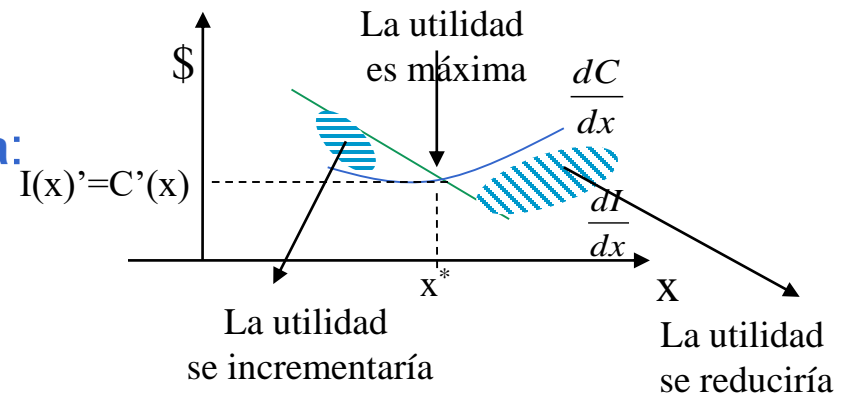
$$U(x) = I(x) - C(x)$$

- **Beneficio o utilidad Máxima:**  
Determinación de la función

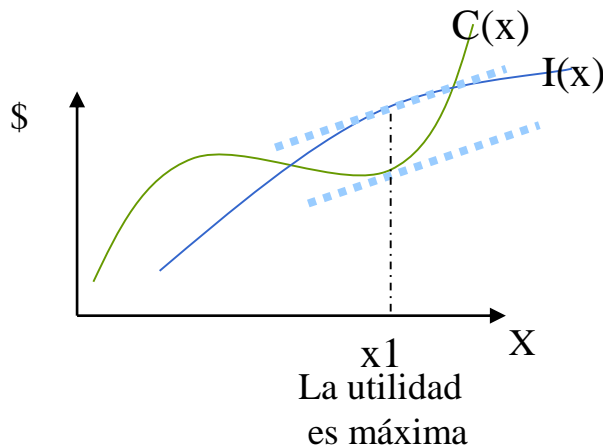
$$\frac{dI}{dx} = \frac{dC}{dx}$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} < \frac{d^2C}{dx^2}$$

*Elaboración e interpretación de curvas*



# Utilidad o Beneficio



## Problema

1. Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es  $p=400-2x$  y que la función de costo promedio es igual a  $0,2x+4+(400/x)$ .

- 1.1 Determinar el nivel de producción que se maximiza la utilidad
- 1.2 El precio en que ocurre la utilidad maximiza
- 1.3 Determinar la utilidad máxima

# Otras funciones económicas



## Función consumo

$$C=f(I)$$

I=Ingreso Nacional Total

C=Consumo Nacional

## Propensión marginal al

consumo= $dC/dI$

## Función Ahorro

$$A=I-C$$

A=Ahorro Nacional

I=Ingreso Nacional T.

C=Consumo Nacional

## Propensión marginal

al consumo= $1-dC/dI$

**Producto del ingreso  
marginal= $dI/dm$**

I=Ingreso

m =número de empleados

Ing. Mixzaida Peña



# Resolución de Ecuaciones no Lineales

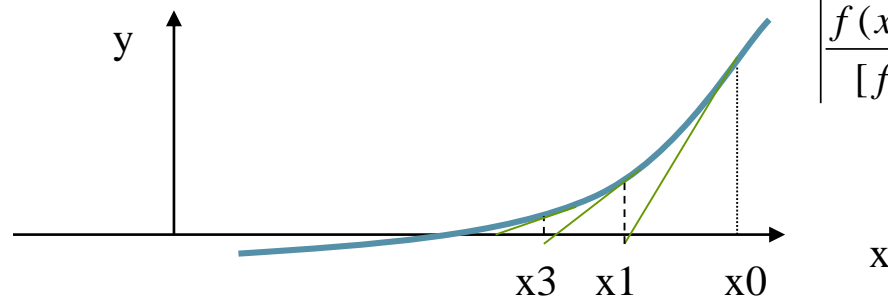
## Métodos de Aproximaciones

### *Método de Newton*

Es un método iterativo que requiere de una estimación inicial

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cuándo converge el método?



$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$$

*Problema:*

1. Estimar la raíz de  $x^3=3x-1$  que se encuentra entre -1 y -2. Continué el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0,0001.

2. Obtener la raíz cuadrada positiva de  $x^2=9$  comenzando con una primera aproximación de 4.

Ing. Mixzaida Peña