Las Funciones Reales

Bloque de Contenidos N° 1

Realizado por:
Ing. Mixzaida Peña
CUFM

Conceptos

- **Producto cartesiano:** el producto cartesiano de dos conjuntos M,N es el conjunto MxN de pares ordenados (a,b) en los que el primer elemento pertenece a M y el segundo a N.

- **Relación Binaria:** Una relación binaria R entre dos conjuntos P y M es un subconjunto del producto PxM.(Enciclopedia didáctica de Matemáticas, pág.,10)

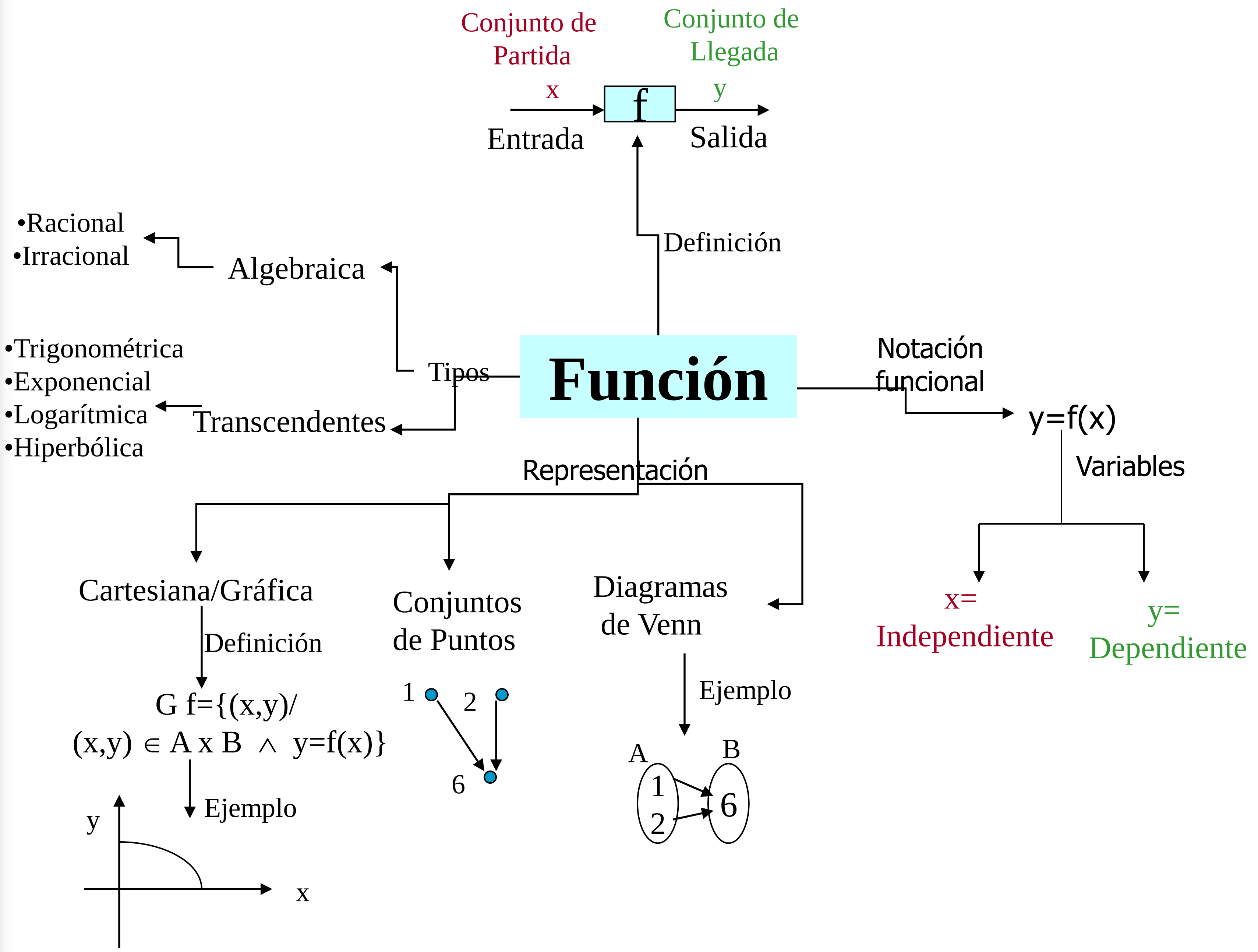
- **Grafo:** Sistema de pares de elementos determinados por la aplicación de un conjunto en sí mismo o en otro (representación de relaciones binarias)

Relación

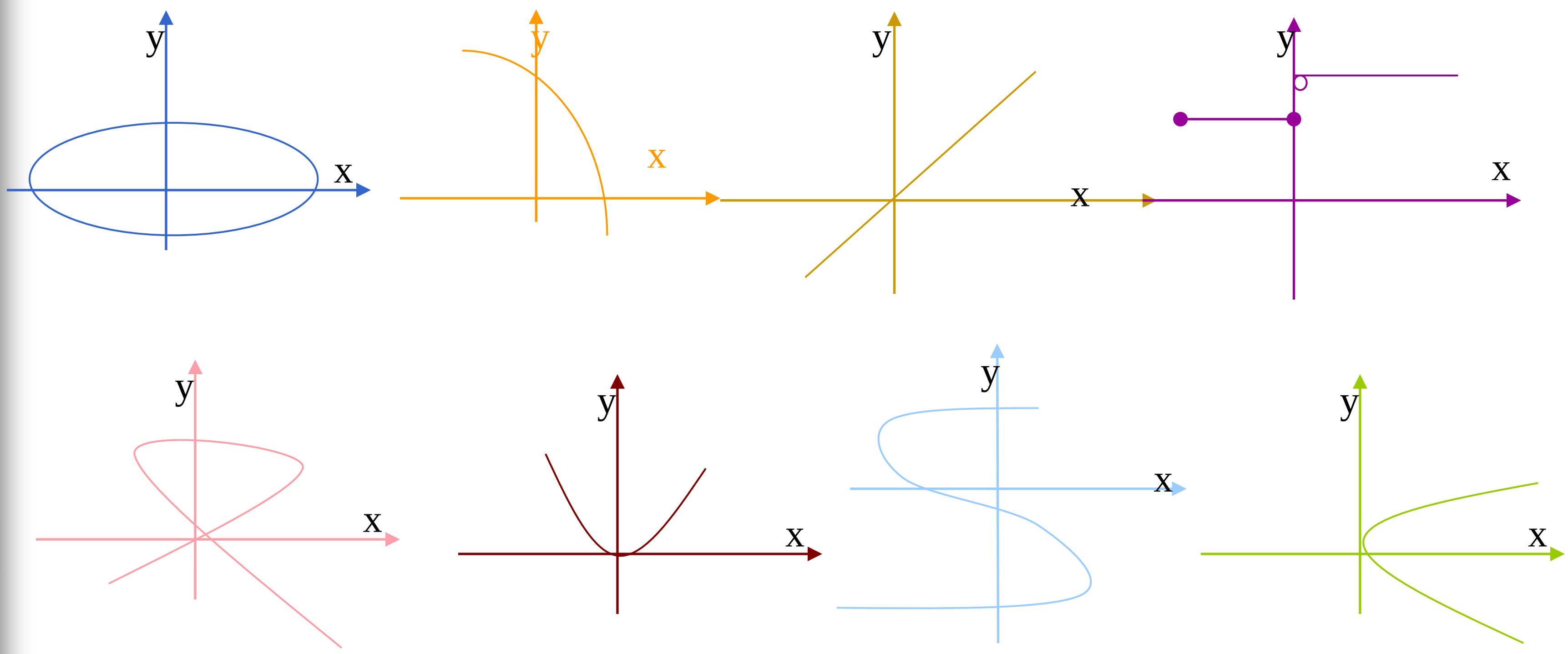
Relación: es un conjunto de pares ordenados (x,y) cuyas componentes pertenecen a un cierto universo.

Ejemplo:{ (1,3); (2,5); (3,7); (2,9); (5,11) }

Una **relación es una función** cuando a cada uno de los elementos del dominio le corresponde una y solo una imagen, en el cual no hay dos pares ordenadas distintas que tengan el mismo primer número.


Conjunto de Partida
Conjunto de Llegada
x
f
y
Entrada
Salida
Definición
•Racional
•Irracional
Algebraica
•Trigonométrica
•Exponencial
•Logarítmica
•Hiperbólica
Transcendentes
Tipos
Función
Notación funcional
y=f(x)
Variables
Representación
Cartesiana/Gráfica
Conjuntos de Puntos
Diagramas de Venn
x= Independiente
y= Dependiente
Definición
G f={(x,y)/ (x,y) ∈ A x B ∧ y=f(x)}
Ejemplo
y
x
1
2
6
Ejemplo
A
B
1
2
6

Identificación de una Función Real



Extensión de una curva
Dominio

- **Dominio de una función** =es el conjunto de todos los posibles valores que puede adoptar la variable x.

  Casos:

1. Dominio de Funciones Racionales Enteras de la forma $y= C_nX^n + C_{n-1}X^{n-1} + ...+ C_1X + C_0$

$$Dom=(-\infty,\infty)$$

2. Dominio de Función Racional Fraccionaria de la forma $y=f(x)= (h(x))/(g(x))$

$$Domf(x)= Dom\ h(x) \cap Dom\ g(x)-\{x/g(x)=0\}$$

3. Dominio de Funciones Irracionales de la forma $y =f(x)=(h(x))^{1/(2n)}$, si $n \in N^*$

$$Dom\ f(x)=\{x/\ h(x) \geq 0\}$$

4. Dominio de funciones Irracionales de la forma $y=f(x)=(h(x))^{1/(2n+1)}$.

$$Dom\ f(x)= =(-\infty,\infty)$$

Extensión de una curva Rango

- **Rango o recorrido de una función** =es el conjunto de todos los posibles valores asumidos por $y=f(x)$ (variable dependiente).
- Determinación del rango de una función a partir del dominio de su inversa

Despejar x en términos de y
$x=f^{--1}(y)$
$\longrightarrow$
Intercambiar x por y
$y=f^{--1}(x)$

Intercambiar x por y
$y=f^{--1}(x)$
$\longrightarrow$
Despejar x en términos de y
$x=f^{--1}(y)$

Función Valor absoluto

- Definición

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

- Dominio= $\{x /\ x \in R\}$
- Rango= $[0, \infty)$
- Propiedades:

$|x| < d \quad -d < x < d$

$|x| > d \quad x < -d \text{ o } x > d$

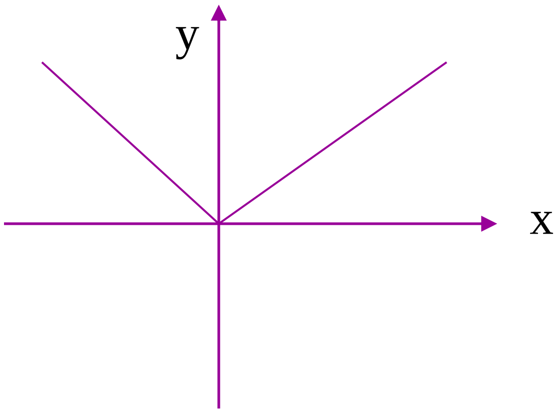
$|a\,b| = |a|\ |b|$

$|a - b| = |b - a|$

$|a / b| = |a| / |b|$

$|a| = |-a|$

- Gráfica



Funciones Elementales

Función Parte entera

- Definición:

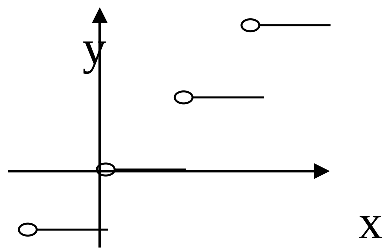
  $y=f(x)=[x]$

Es el mayor entero que

es menor o igual a x.

Ejemplo: n<x<n+1; la parte entera es n

- Dominio= $\{x/\ x \in R\}$
- Rango= $\{y/\ y \in Z\}$
- Gráfica



Función Potencial

Forma

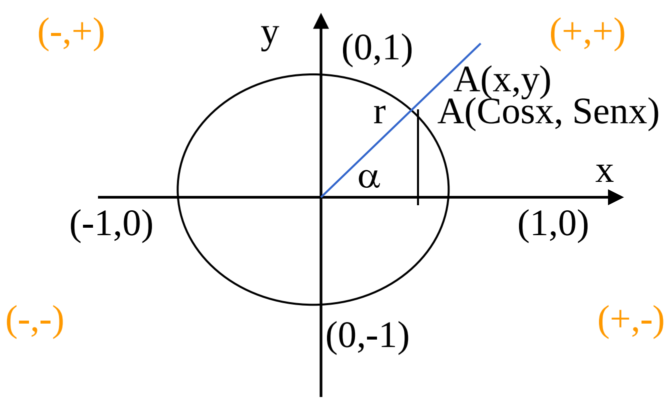
$y = x^a$

Funciones Trigonométricas

- 360° equivale a 2π radianes

  180° equivale a π radianes.

  90° equivale a π/2 radianes.



$$Sen^2\alpha + Cos^2\alpha = 1$$

$$Tg\alpha = \frac{Sen\alpha}{Cos\alpha}$$

$$Sen\alpha * Co\sec\alpha = 1$$

$$Cos\alpha * Sec\alpha = 1$$

$$Tg\alpha * Cot\alpha = 1$$

$$Sen\alpha = \frac{ordenada}{radio} = \frac{y}{r}$$

$$Sen\alpha = y$$

$$Cos\alpha = \frac{abscisa}{radio} = \frac{x}{r}$$

$$Cos\alpha = x$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{ordenada}{abscisa} = \frac{y}{x}$$

$$Cot\alpha = \frac{abscisa}{ordenda} = \frac{x}{y}$$

$$Sec\alpha = \frac{radio}{abscisa} = \frac{r}{x}$$

$$Co\sec\alpha = \frac{radio}{ordenda} = \frac{r}{y}$$

$$Sec^2\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha$$

$$Csc^2\alpha = 1 + Co\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$$

Funciones Trigonométricas

Función Seno

- Forma: y=Sen α
- Gráfica: sinusoide
- Dominio={x/ x$\in$ R}
- Rango=[-1,1]
- Periodo= 2π

Función Inversa

- Forma: y=Sen^{-1} α
- Dominio=[-1,1]
- Rango=[- π/2, π/2]

Función Coseno

- Forma: y=Cos α
- Gráfica: cosinusoide
- Dominio={x/ x$\in$ R}
- Rango=[-1,1]
- Periodo= 2π

Función Inversa

- Forma: y=Cos^{-1} α
- Dominio=[-1,1]
- Rango=[0, π]

Funciones Trigonométricas

Función Tangente

- Forma: $y=Tg\alpha$
- Gráfica: tangentoide
- Dominio=R-{x/ x=(2K+ 1)π/2 $\vee$ k=0,$\pm$ 1, $\pm$ 2...}
- Rango=(-∞,∞)
- Periodo= π

Función Inversa

- Forma: $y=Tg^{-1}\alpha$
- Dominio={x/ x$\in$ R}
- Rango= [-π/2, π/2]

Función Cotangente

- Forma=$y=Cot\ \alpha$
- Gráfica: cotangentoide
- Dominio=R-{x/ x=(K π) $\vee$ k=0,$\pm$ 1, $\pm$ 2...}
- Rango=(-∞,∞)
- Periodo = π

Función Inversa

- Forma: $y=Cot^{-1}\alpha$
- Dominio=(-∞,∞)
- Rango=[0, π]

Funciones Trigonométricas

Función Secante

- Forma=y=Sec α
- Gráfica: secantoide
- Dominio= R-{x/ x=(2K+ 1)π/2 $\vee$ k=0,$\pm$ 1, $\pm$ 2...}
- Rango=(-$\propto$,-1] $\cup$ [1,$\propto$)
  Periodo=2π

Función Inversa

- Forma: y=Sec^{-1} α
- Dominio=(-$\propto$,-1] $\cup$ [1,$\propto$)
- Rango= [-π, -π/2] $\cup$ (0, π/2]

Función Cosecante

- Forma=y= Cosec α
- Gráfica: cosencatoide
- Dominio=R-{x/ x=(K π) $\vee$ k=0,$\pm$ 1, $\pm$ 2...}
- Rango=(-$\propto$,-1] $\cup$ [1,$\propto$)
- Periodo= 2π

Función Inversa

- Forma: y=Cosec^{-1} α
- Dominio=(-$\propto$,-1] $\cup$ [1,$\propto$)
- Rango= [-π, -π/2] $\cup$ (0, π/2]

Relaciones entre las Funciones Trigonométricas de ciertos ángulos

- $\text{Sen}\alpha=\cos(\pi/2-\alpha)$
- $\text{Cos}\alpha=\text{Sen}(\pi/2-\alpha)$
- $\text{Tg }\alpha=\text{Cot}(\pi/2-\alpha)$
- $\text{Sen}\alpha=\text{Sen}(\pi-\alpha)$
- $\text{Cos}\alpha=-\text{Cos}(\pi-\alpha)$
- $\text{Tg }\alpha=-\text{tg}(\pi-\alpha)$
- $\text{Cot }\alpha=-\text{Cot}(\pi-\alpha)$
- $\text{Sec }\alpha=-\text{Sec}(\pi-\alpha)$
- $\text{Cosec }\alpha=\text{Cosec}(\pi-\alpha)$
- $\text{Sen }\alpha=-\text{Sen}(-\alpha)$
- $\text{Cos }\alpha=\text{Cos}(-\alpha)$
- $\text{tg }\alpha=-\text{tg}(-\alpha)$
- $\text{Cot }\alpha=-\text{Cot}(-\alpha)$
- $\text{Sec }\alpha=\text{Sec}(-\alpha)$
- $\text{Sen }\alpha=-\text{Sen}(\alpha+\pi)$
- $\text{Cos }\alpha=-\text{Cos}(\alpha+\pi)$
- $\text{Tg }\alpha=\text{tg}(\alpha+\pi)$
- $\text{Sen}(\alpha+\beta)=\text{Sen }\alpha\text{Cos }\beta+\text{Cos }\alpha\text{ Sen}\beta$
- $\text{Sen}(\alpha-\beta)=\text{Sen }\alpha\text{Cos }\beta-\text{Cos }\alpha\text{ Sen}\beta$
- $\text{Cos}(\alpha+\beta)=\text{Cos }\alpha\text{Cos }\beta-\text{Sen }\alpha\text{ Sen}\beta$
- $\text{Cos}(\alpha-\beta)=\text{Cos }\alpha\text{Cos }\beta+\text{Sen }\alpha\text{ Sen}\beta$
- $\text{Tg}(\alpha+\beta)=(\text{Tg }\alpha+\text{Tg }\beta)/(1-\text{Tg }\alpha\text{Tg }\beta)$
- $\text{Sen2 }\alpha=2\text{Sen }\alpha\text{Cos }\alpha$
- $\text{Cos2 }\alpha=\text{Cos}^2\alpha-\text{Sen}^2\alpha$
- $\text{Tg2 }\alpha=(2\text{Tg }\alpha)/(1-\text{Tg}^2\alpha)$

Relaciones entre las funciones trigonométricas

Tabla de Burgos,1971, p402

Funciones

y=f(x) + c	Desplazar c unidades hacia arriba
Y=f(x) -c	Desplazar c unidades hacia abajo.
Y=f(x-c)	Desplazar c unidades hacia la derecha
y=f(x+c)	Desplazar c unidades hacia la izquierda

Tipos de operaciones algebraicas con funciones reales elementales

Definición

Suma:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Dominio

$Df \cap Dg$

Definición

Cociente:

$(f / g)(x) = f(x) / g(x)$

Dominio

$Df \cap Dg - \{x / g(x) = 0\}$

Definición

Producto:

$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$

Dominio

$Df \cap Dg$

Definición

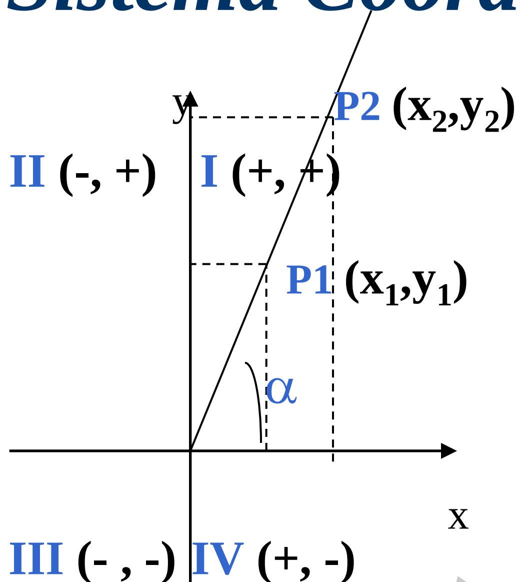
Resta:

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Dominio

$Df \cap Dg$

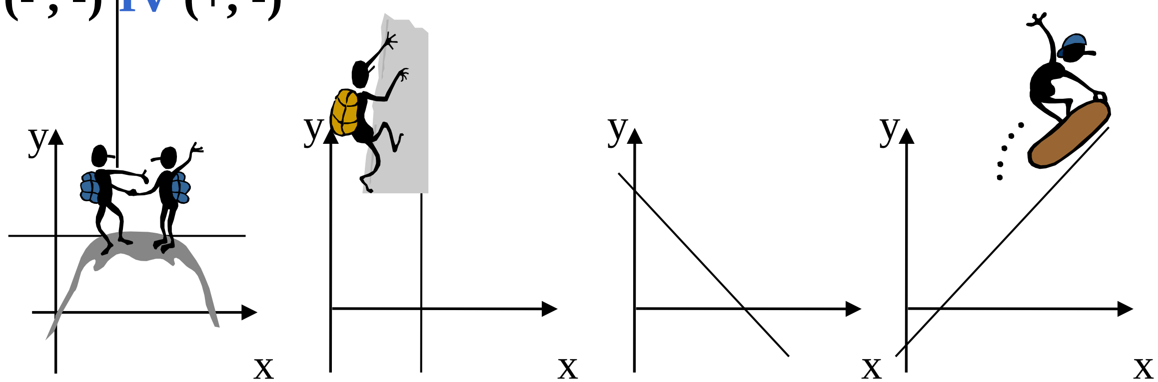
Sistema Coordenado en el plano



Teorema

m= tgα=Pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Pendiente cero
m=0

Pendiente indefinida
m=∝

Pendiente negativo
m< 0

Pendiente positiva
m>0

Función Lineal

Una función f es lineal si y solo si f(x) puede ser escrita en la forma f(x)=ax + b, en donde a y b son constante y $a \neq 0$.

- Dominio=R
- Rango= R

Ecuación de la recta que pasa
por un punto y tiene una pendiente
dada (m)
Ecuación punto pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación simétrica
o
segmentaria de la recta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ecuación de la recta
dada
su pendiente (m) y su ordenada
en el origen (b)

$$y = mx + b$$

Ecuaciones
Recta

Ecuación de la recta que pasa
por dos puntos

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

Ecuación general
de la recta

$$Ax + By + C = 0$$

Recta paralela al eje y
x=a

Recta paralela
al eje x
y= a

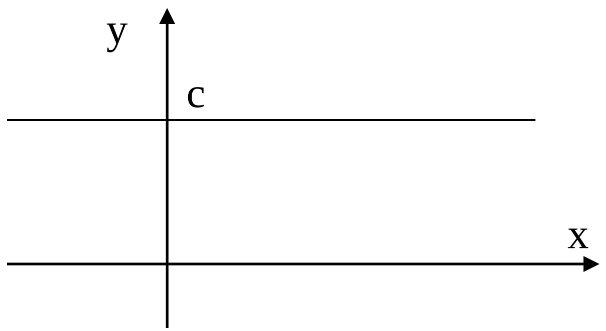
Funciones Elementales

Función constante:

- Definición

f(x)=C, siendo c una constante

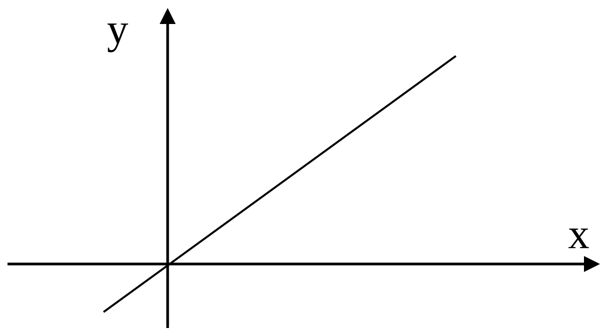
- Dominio=R
- Rango={c}
- Gráfica



- **Función Identidad**
- Definición

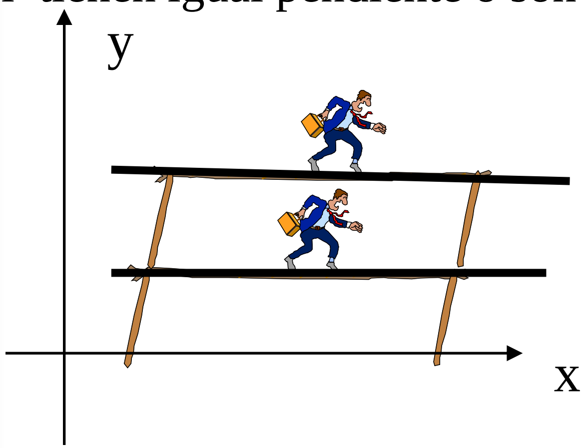
f(x)=x

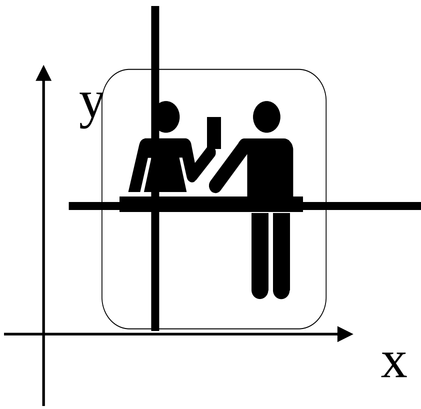
- Dominio=R
- Rango=R
- Gráfica



Dos líneas rectas son paralelas si tienen igual pendiente o son verticales

Dos líneas rectas son perpendiculares si y solo si m1= -1/ m2





Problema:

1.” Suponga que los clientes demandaran 40 unidades de un producto cuando el precio es de \$12 por unidad, y 25 unidades cuando el precio es de \$18 cada una. Encontrar la ecuación demanda, suponiendo que es lineal”. (Richard y Ernest, 1997,p.138)

2. Si las ecuaciones de oferta y demanda para un bien particular, vienen dadas por: 300 p -x- 2400=0 ; 180p +x -2160=0. Obtener el punto de equilibrio gráficamente y analíticamente. (Ruíz, 1993,p81)

Función Cuadrática

- Forma: $f(x)=ax^2+bx+c$; a,b,c son constante y $a\neq 0$.
- Gráfica: Parábola.
- Dominio=R
- Concavidad:

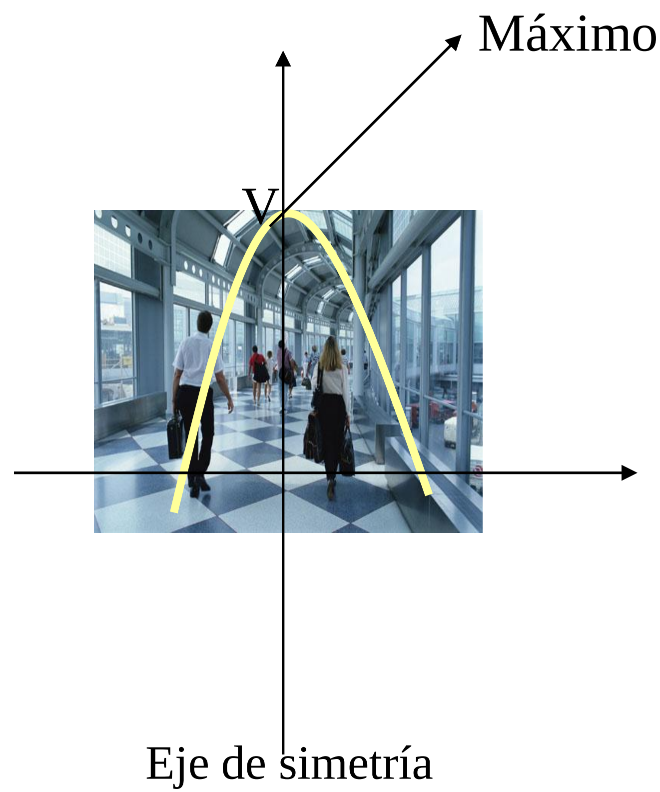
Si a>0 , cóncava hacia arriba ($\cup$). Existe un Mínimo (V)

Si a<0, cóncava hacia abajo.Existe un Máximo (V)

- Vértice: V (x,y)

x= -b/ (2*a)

y=f (-b/ (2*a))

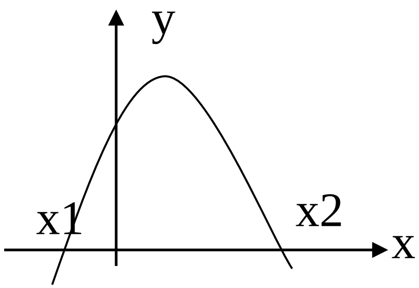


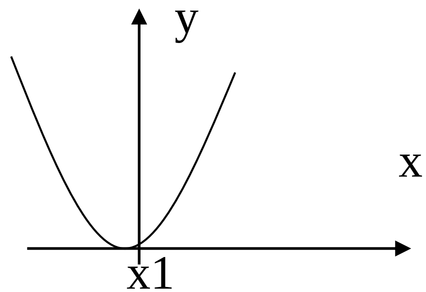
Función Cuadrática

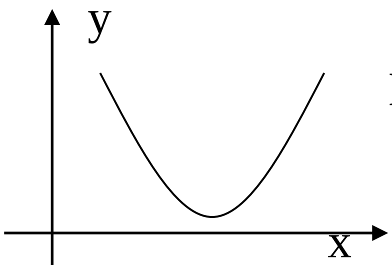
- Puntos de cortes:

Con el eje x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$







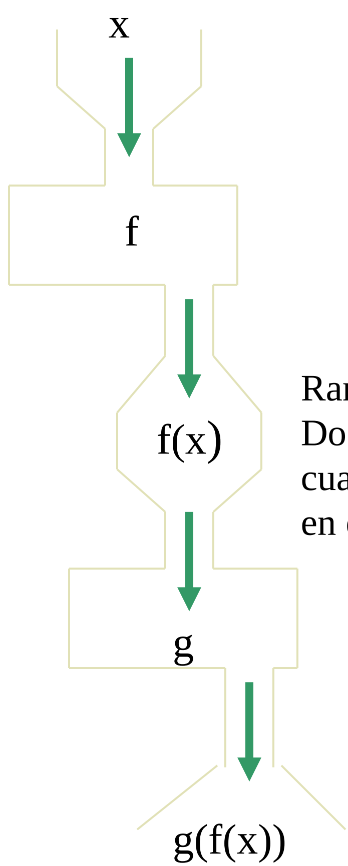
No hay
puntos de cortes

Con el eje y: A(0, c)

Problema: La función de demanda para una producto es p=1000 -2x donde p es el precio por unidad cuando x unidades son demandadas (por semana) por los consumidores. Encontrar el nivel de producción que maximizará el ingreso total del productor.

Composición de funciones

La composición de una función g con una función f se define como la función h cuyo valor se determina evaluando la función g en el f(x)



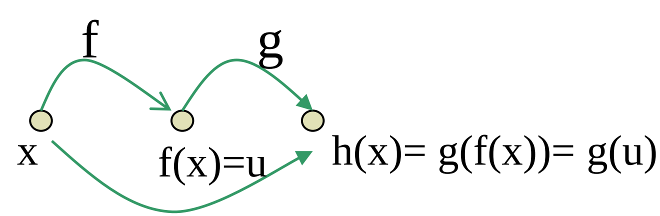
$h(x)=g(f(x))$ Función compuesta

Función Interior

Función Exterior

Rango. F $\cap$ Dom. g $\neq 0$

Dos funciones se pueden componer cuando la imagen de la primera está en el dominio de la segunda



$h=g \circ f=g(f(x))=g(u)$

Función Inyectiva, Sobreyectiva y Biyectiva

Función Inyectiva → **Función Biyectiva** ← **Función Sobreyectiva**

Si y solo si

$\forall\ x \in A; x1 \neq x2 \rightarrow f(x1) \neq f(x2)$

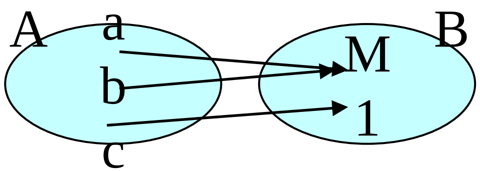
Si y solo si

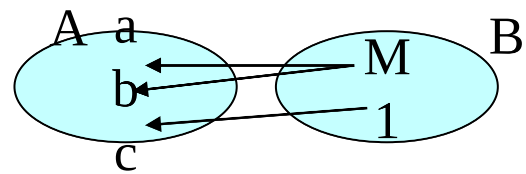
$\forall\ y \in B$;existe $x \in A$/ $y=f(x)$

Todos los elementos del Codominio son imagen de por lo menos un elemento del dominio

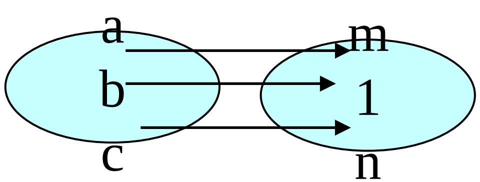
El Recorrido y el Codominio coinciden

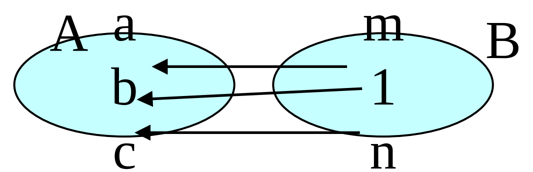
Función Inversa





No posee inversa





Posee inversa
Las funciones biyectivas poseen inversa

" Si f es una **función uno a uno** la cual es el conjunto de pares ordenados (x,y), entonces existe una función f^{-1} denominada inversa de f, donde f^{-1} es el conjunto de pares ordenados (y,x) definida por:

$x = f^{-1}(y)$ si solo si $y = f(x)$"

(Leithold, 1987,p.609)

Teorema: si f es estrictamente monótona en su dominio, entonces f tiene una inversa (Purcell,1998)

Función Inversa

x $\longrightarrow$ **f** $\longrightarrow$ y $\longrightarrow$ **F inversa** $\longrightarrow$ $x=f^{-1}\,(f(x))$

$$Rango_{f(x)} = Dominio_{f^{-1}(x)}$$

$$Rango_{f^{-1}(x)} = Dominio_{f(x)}$$

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

$$(f^{-1} o f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$(f o f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

Despejar x en términos de y
$x=f^{--1}(y)$

$\longrightarrow$

Intercambiar x por y
$y=f^{--1}(x)$

Intercambiar x por y
$y=f^{--1}(x)$

$\longrightarrow$

Despejar x en términos de y
$x=f^{--1}(y)$

Función Exponencial

- **Definición:** La función definida por $f(x)=a^x$, donde $a>0$, $a \neq 1$, y el exponente x es cualquier número real, es llamado función exponencial.
- **Dominio=R**
- **Rango** =(0, ∝)
- **Reglas de los exponentes**:

m, n son números reales

y a, b son positivos

$$1.\ a^m a^n = a^{m+n}$$

$$2.\ (a^m)^n = a^{mn}$$

$$3.\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$4.\ a^0 = 1$$

$$5.\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$6.\ (ab)^n = a^n b^n$$

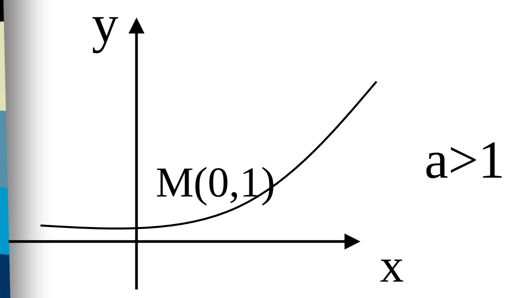
$$7.\ a^1 = a$$

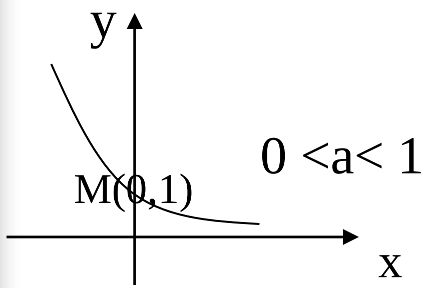
$$8.\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Función Exponencial Natural

$$f(x)= e^x$$

- Forma gráfica





- Función continua
- Función Biyectiva
- Ecuación exponencial

Si $a^m= a^n$ m=n

Aplicaciones

$Crecimiento$

$Exponencial$

$$y = Q_0 e^{kt}; Q_0, k > 0$$

$Decrecimiento$

$Exponencial$

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$$

$Curvas$

$Aprendizaje$

$$Q(t) = C - Ae^{-kt}; C, A, K > 0$$

$Crecimiento$

$Logistico(P.E)$

$$Q(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}; A, B, K > 0$$

- Problema:

La fábrica de camisas Río caribe estima, que un obrero puede producir p=50 (1-e$^{-0,34t}$) camisas/d ”t”días después de su ingreso a la empresa.

A. Cuántas unidades podrá producir el obrero al finalizar la primera semana? A la larga?

Función logarítmica

- Definición: La función logarítmica de base a, donde a>0 y a≠ 1 es denotada por $\log_a$ y está definida por:

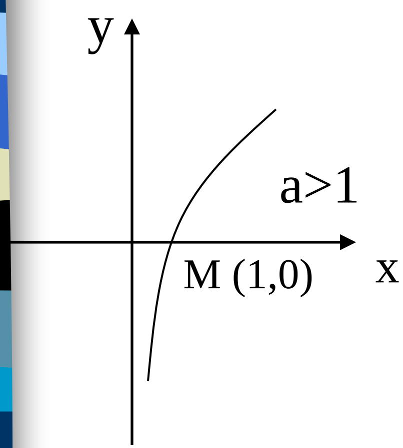
  $$y = \log_a x \text{ si y solo si } a^y = x$$

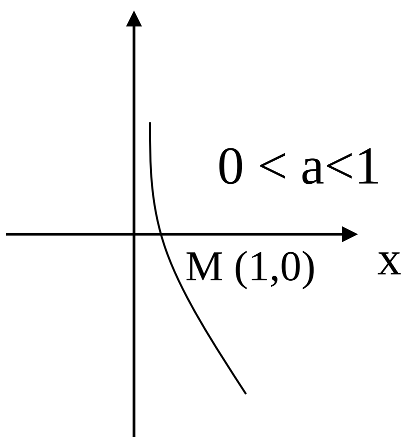
- Dominio=(0, ∝)
- Rango=R
- Función continua
- Función Inyectiva
- Función creciente
- Reglas:

1. $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$
2. $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$
3. $\log_a m^r = r \log_a m; r = numero_{racional}$
4. $\log_a(m+n) \neq \log_a m + \log_a n$
5. $\log_a(m-n) \neq \log_a m - \log_a n$
6. $\log_a \frac{1}{m} = -\log_a m$
7. $\log_a 1 = 0$
8. $\log_a a = 1$
9. $\log_a b^r = r$
10. $a^{\log_a m} = m$
11. $\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$
12. $e^{\ln x} = x; x > 0$
13. $\ln e^x = x$

Función logarítmica

- Función Continua
- Gráfica:





- Tipos de logaritmos:

1. Los logaritmos de base 10 son llamados son llamados logaritmos comunes log $y=\log_{10}x=\log$
2. Logaritmos Naturales

   $y=Ln= \log_e x$

•Problema:

La ecuación de oferta de un fabricante es p=log (10+ (x/2)). A que precio el fabricante ofrecerá 1980 unidades? (Richard y Ernest, 1997, p.200)