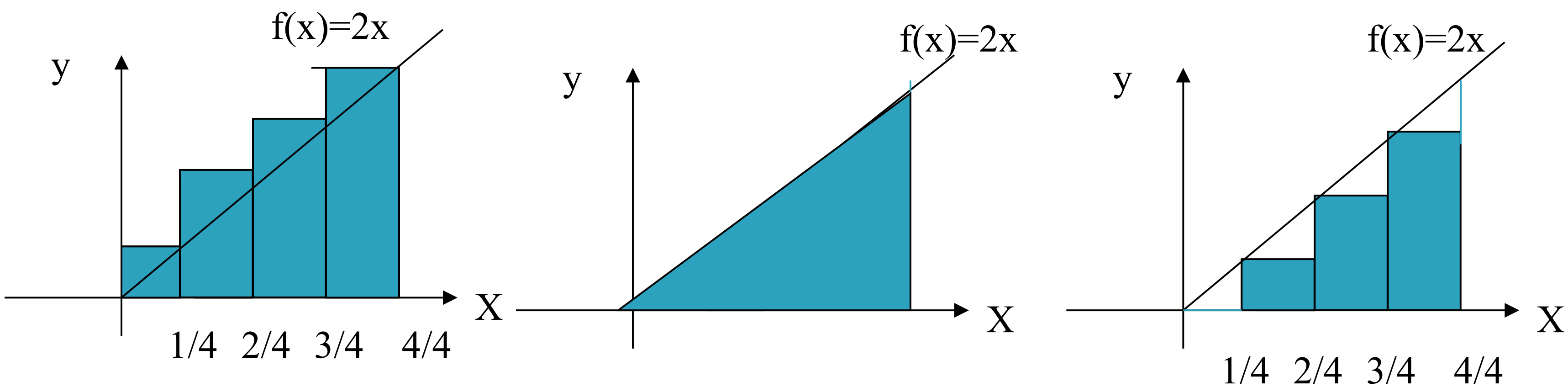
La Integral Definida y la Primitiva de una Función

Bloque de Contenidos N° 3

Realizado por:
Ing. Mixaida Peña Zerpa

Integral Definida/ Integral de Reimman



$$\mathbf{3/4 = S_4 \leq A \leq S_4 = 5/4}$$

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum f(xi)\Delta\, x = Area}$$

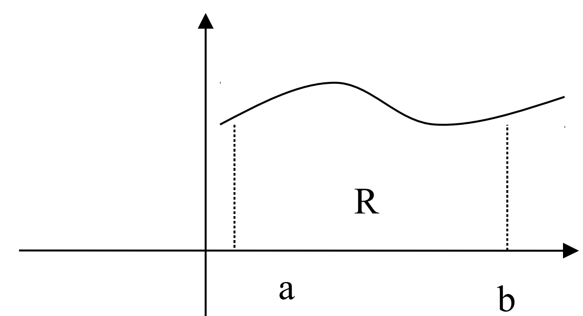
El límite común de S_n cuando $n\to\infty$, si este existe, se llama **Integral Definida**

Integral Definida/ Integral de Reimman

Definición

Si f es no negativa y continua en [a,b], entonces la integral definida proporciona el área debajo de la gráfica de f en [a,b]

$$lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$



$$lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Los límites de Integración

Variable de Integración

Integrando

Los límites de Integración

Integral Definida/ Integral de Reimman

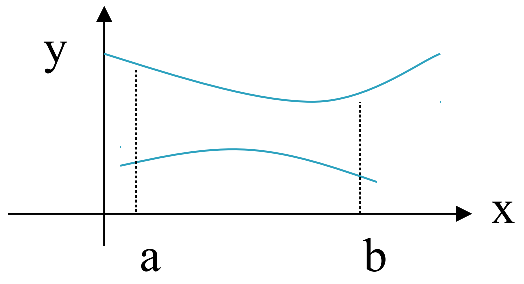
Teoremas

- Si f es continua en [a,b], entonces f es integrable en [a,b]; es decir existe la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

- Sea f y g funciones continuas tales que f(x)≥g(x) en [a,b], entonces el área está dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



Teoremas

- **Linealidad de la Integral Definida:** Suponga que f y g son integrables en [a,b] y que k es una constante. entonces kf y f+ g son integrales y:

$$i)\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$ii)\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$iii)\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

- **Derivación de la integral Definida**

Teoremas

- **Propiedad de Comparación:**Si f y g son integrables en [a,b] y si f(x) ≤ g(x) para toda x en [a,b], entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

- **Propiedad de Acotamiento:**Si f es integrable en [a,b] y m ≤f(x) ≤M para toda x en [a,b], entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

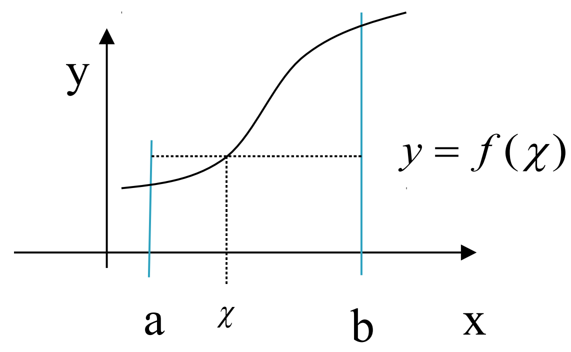
Valor Medio (Promedio)

Interpretación

Si la función y=f(x) es continua en el intervalo [a,b], entonces existe un valor tal que:

$$f(\chi)$$

$$f(\chi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$



Problema:

La utilidad P (en dólares) de un negocio está dado por:

$$P=)(x)=396x - 2{,}1x^2 - 400$$

donde x es el número de unidades del producto vendido . Encuentre la utilidad promedio sobre el intervalo de x=0 a x=100. (Richard y Ernest, 1997)

Lista básica de Integrales Indefinidas

$$1.\int kdx = kx + C; k = constante$$

$$2.\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1$$

$$n = n^\circ \, racional$$

$$3.\int e^x dx = e^x + C$$

$$4.\int kf(x) = k\int f(x)dx; K = constante$$

$$5.\int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$6.\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$7.\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C; a > 0$$

$$8.\int Cosxdx = Senx + C$$

$$9.\int Senxdx = -Cosx + C$$

$$10.\int Sec^2 xdx = Tgx + C$$

$$11.\int Csc^2 xdx = -Cotx + C$$

$$12.\int SecxTgxdx = Secx + C$$

$$13.\int CscxCotxdx = -Cscx + C$$

$$14.\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Sen^{-1}x + C$$

$$15.\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -Cos^{-1}x + C$$

$$16.\int \frac{dx}{1+x^2} = Tg^{-1}x + C$$

$$17.\int \frac{dx}{1+x^2} = -Cot^{-1}x + C$$

$$18.\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = Sec^{-1}|x| + C$$

Lista básica de Integrales Indefinidas

$$19.\int \operatorname{tg} x dx = \ln|Secx| + C$$

$$20.\int Cotxdx = \ln|Senx| + C$$

$$21.\int Secxdx = \ln|Secx + Tgx| + C$$

$$22.\int Co\sec xdx = \ln|Co\sec x - Cotx| + C$$

La integral Indefinida

Definición

Una antiderivada de una función f en un intervalo I es una función F tal que **F'(x)= f(x).**

El proceso de determinar todas las antiderivadas o de una función se denomina antiderivación o integración indefinida

En forma general, la Integral Indefinida de cualquier función f con respecto a x se escribe $\int f(x)dx$ y denota la antiderivada más general de f. Como todas las antiderivadas de f difieren sólo en una constante, entonces:

si y solo si F'(x)=f(x)

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$C = constante$$

La integral Indefinida

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Constante de Integración

Signo de Integral
Proceso de antiderivación

Integrando

Variable de Integración=x

Interpretación:

Las antiderivadas F(x) +C son un conjunto de funciones dependientes de una constante arbitraria que representan a una familia curvas y cuyas derivadas son f(x).

La integral Indefinida Teoremas

- Si f y g son dos funciones tales que $f'(x)=g'(x)$ para todos los valores de x en el intervalo I, entonces existe una constante k tal que $f(x)=g(x)+k$

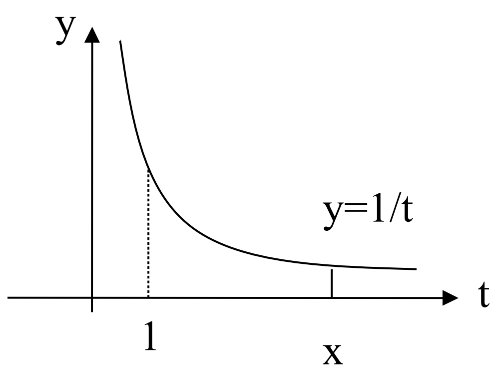
La integral Definida
Función Logaritmo Natural

Definición:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt; x > 0$$

$$D_x \int_1^x \frac{1}{t}dt = D_x \ln x = \frac{1}{x}; x > 0$$

$$D_x \ln u = \frac{1}{u} D_x u$$



Métodos

- **Fórmula de Integración por Partes.**

$$y = uv$$
$$u = f(x)$$
$$v = g(x)$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

- **Integración de Fracciones Parciales**

Primer Paso: El polinomio del denominador debe ser de menor grado que el numerador

$$\frac{N(x)}{D(x)} = P(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Segundo Paso: Factorizar el denominador en factores lineales y cuadráticas irreducibles.

Tercer Paso:

Si el denominador contiene **factores lineales distintos y no repetidos**, entonces a cada factor le corresponde una fracción parcial A/(x-a), tal que el integrando sea la suma de las fracciones parcial.

Métodos

Si hay **factores lineales repetidos**, entonces a cada factor $(x-a)^k$, le corresponderá la suma de k fracciones parciales:

$A/(x-a) + B/(x-a)^2 + \ldots + K/(x-a)^k$

Si el denominador contiene **factores cuadráticos irreducibles distinto y no repetido,** entonces a cada factor le corresponde una fracción parcial de la forma $(Ax+B)/(x^2 + bx + c)$

Si el denominador contiene **factores $(x^2 + bx + c)^k$**, entonces a cada uno de tales factores le corresponde una suma de k fracciones parciales de la forma:

$(A+Bx)/(x^2 + bx + c) + (C+Dx)/(x^2 + bx + c)^2 + \ldots (M+Nx)/(x^2 + bx + c)^k$

Cuarto Paso:

Se determinan los valores de las constantes

Quinto Paso:

Se resuelven las integrales por los métodos ya conocidos.

Métodos de Cambio de Variable o Integración por Sustitución

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Paso #1

Sea u=g(x), donde g(x) es parte del integrando, que por lo general es la función interior de f(g(x))

Paso # 2

Se calcula d u=g’(x) d x

Paso # 3

Se usa la sustitución u=g(x) y d u=g’(x) para convertir toda la integral en una que solo utilice u

Paso # 4

Se evalúa la integral resultante

Paso # 5

Se reemplaza u con g(x)

(Tan, 1998, p.678)

Aplicaciones

Problemas:

1. Si la función de Ingreso Marginal para el Producto de un fabricante es: $dI/dx = 2000 - 20x - 3x^2$. Encontrar la función demanda.

2. En la manufactura de un producto, los costos fijos por semana son de $4000. Los costos fijos son costos como la renta y el seguro, que permanecen constante durante todos los niveles de producción en un periodo dado. Si la función de costo marginal dC/dx es $0.000001(0{,}002x^2 - 25x) + 0{,}2$. Donde c es el costo total ($)de producir x libras de producto por semana encontrar el costo de producir 10000 libras en una semana.

(Richard y Ernest, 1997)

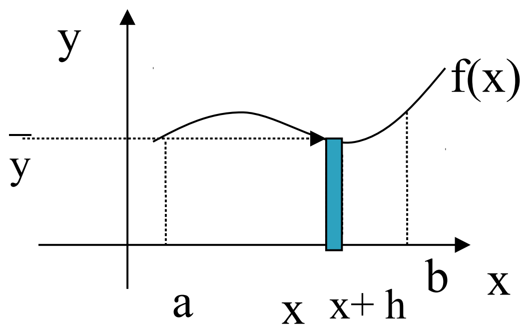
3. Un cierto fabricante determinó que si x unidades de un cierto artículo de mercancía se produce por día , el costo marginal es $C'(x) = 0.3x - 11$. Si el precio de venta del artículo es de $19 por unidad y el costo general es de 100 dólares por día. Calcular la máxima utilidad total diaria.

(Leithold, 1987, p.515)

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

- **Definición:** si f es continua en el intervalo [a,b] y F es cualquier antiderivada de f en el intervalo, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$



$$A(a) = 0$$

$$A(b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$A(x+h) - A(x) = h\bar{y}$$

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \bar{y}$$

$$lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$$

$$A'(x) = f(x)$$

$$A(x) = F(x) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

$$A(x) = F(x) - F(a)$$

$$x = b$$

$$A(b) = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

- Si f es continua en [a,b], entonces

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

es diferenciable en cada punto x de [a,b], y

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

Corolario: Si y=f(x) es continua en [a,b], entonces existe una función F(x) cuya derivada en [a,b] es f

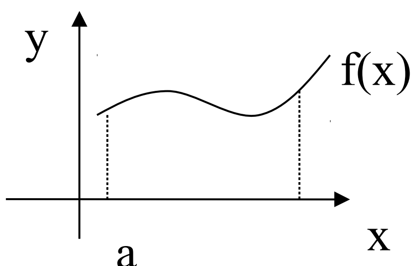
Propiedades de la Integral Definida
Teoremas

$Si\,a > b, entonces:$

$$1.\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$2.\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3.\int_a^b f(x)dx$$ ⟶ f es continua y f(x)≥ 0 en [a,b]



$$4.\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx; k = constante$$

$$5.\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$6.\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

$$7.\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$a < b < c$

$$8.\int_a^b f(x) \geq 0; si$$

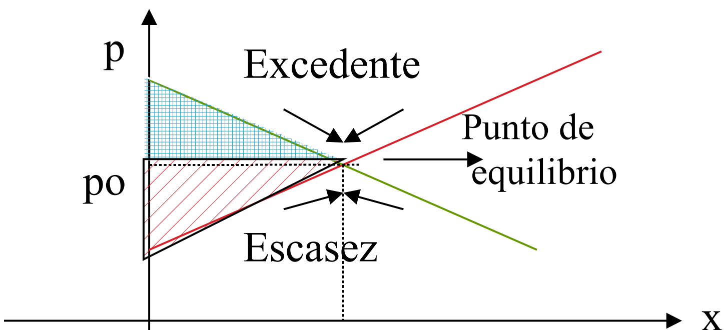
$f(x) \geq 0_{en}[a,b]$

$$9.\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx; si$$

$f(x) \leq g(x)_{en}[a,b]$

Aplicaciones

- **Determinación del Excedente del productor:**



CS=Excedente de consumidores

$$CS = \int_{0}^{x_0} [f(x) - p_0]dx$$

- **Determinación del Excedente del productor:**

PS=Excedente de consumidores

$$PS = \int_{0}^{x_0} [p_0 - g(x)]dx$$

Problema: La función de demanda para un producto es p=100 -0,05x
La función de oferta es p= 10 + 0,1 x
Determinar los excedentes de consumidores y productores bajo equilibrio de mercado. (Richard y Ernest,1997)

Métodos de Integración Aproximada

- **Regla del Trapecio**: f es continua y f(x)≥ 0 sobre [a,b]

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + E$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\{f(a)+2f(a+h)+\ldots.+2f[a+(n-1)h]+f(b)\}+E$$

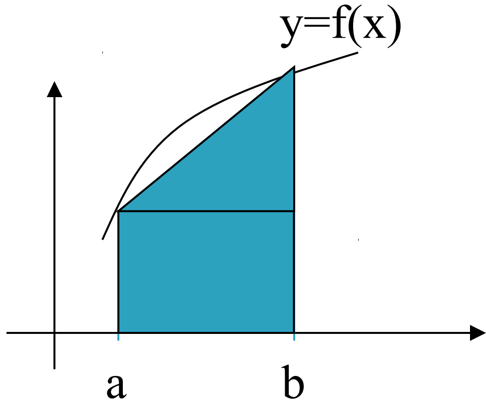
$$h = \frac{b-a}{n}$$

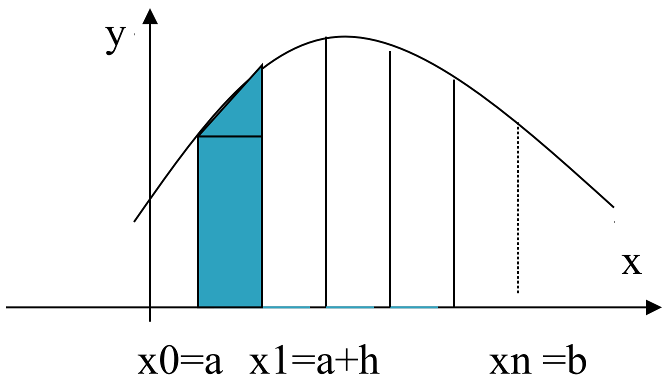
$$E = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$E \approx -\frac{1}{12}(b-a)h^2\left|f''(x)\right| = -\frac{1}{12}h^3 f''(\xi)$$

$$|E| \le -\frac{1}{12}(b-a)h^2 M$$

$$M = Cota_{superior}\ para_{max\left|f''(x)\right|}$$





Métodos de Integración Aproximada

- **Ventajas:** sencillez y óptima para integrales impropias
- **Desventajas:** necesita un gran número de subinetrvalos para una buena precisión.

Problema:

1.Usar la regla del trapecio con n=4, para estimar $\int_1^2 x^2 dx$, y comparar esta aproximación con el valor exacto de la integral. (Thomas, 1987, p. 311).

2.Ajústese $\int_0^1 4x^3 dx$ por la regla del trapecio y la regla de Simpson con n=2

Regla de Simpson

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(\bar{x}) + f(b)] + E = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + f(b)] + E$$

$$h = \frac{(b-a)}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\{f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 4f[a+(n-1)h] + f(b) + E$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$n = N° \ par$$

$$|E| \le (b-a)\frac{h^4}{180} max|f^{iv}(x)| = -\frac{1}{90}h^5 f^4(\xi)$$

$$max|f^{iv}(x)|_{tomados} \ en[a,b]$$

$$|E| \le (b-a)\frac{h^4}{180} M$$

$$M = Cota_{\sup erior} max|f^{iv}(x)|$$