Límites de Funciones Reales

Bloque de Contenidos N° 2

Realizado por:
Ing.Mixzaida Peña11

Límites

Definición

"La función f tiene el límite L cuando x tiende a a, lo que se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si los valores f(x) se pueden acercar tanto como se quieran al número L al considerar x suficientemente cercana (pero no igual) a a".(Tan, 1998,p.474)

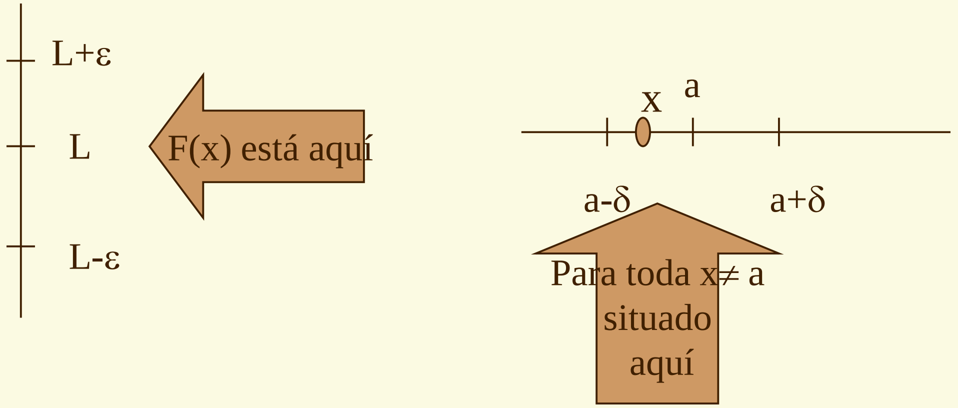
$$vp = \frac{distancia}{tiempo} = \frac{2(t^2-4)}{t-2}$$

$$vi = \lim_{t \to 2} \frac{2(t^2-4)}{t-2}$$

Límites

“El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es el número L si:

Dado cualquier radio $\varepsilon>0$ en torno a L, existe algún radio $\delta>0$ en torno a c tal que, para toda x, $0<|x-a|<\delta$ implica $0<|f(x)-L|<\varepsilon$ “ (Thomas, 1987, p.63)



Propiedades de los Límites
Teoremas

Si $\quad lim_{x\to a} f(x) = L$

$lim_{x\to a} g(x) = M$

Entonces:

$1. lim_{x\to a}[f(x)]^r = L^r ; r = n° entero +$

$2. lim_{x\to a} cf(x) = c lim_{x\to a} f(x) = cL; c = n° real$

$3. lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = lim_{x\to a} f(x) \pm lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$

$4. lim_{x\to a}[f(x) * g(x)] = [lim_{x\to a} f(x)]*[lim_{x\to a} g(x)] = LM$

$5. lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{lim_{x\to a} f(x)}{lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}; M \neq 0$

$6. lim_{x\to a} c = c; c = constante$

$7. Si$

$lim_{x\to a+} f(x) = lim_{x\to a-} f(x) = L$

$Entonces:$

$lim_{x\to a} f(x) = L$

$8. lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$9. lim_{x\to 0} \frac{Senx}{x} = 1$

$10. lim_{x\to 0} \frac{1-Cosx}{x} = 0$

Límites Indeterminados

Forma 0/0

$\downarrow$ Reemplazar

La función dada
con otra adecuada

$\downarrow$ Evaluar

El límite de esta función
cuando x tiende a a

Forma ∞ / ∞

$\downarrow$ Dividir

El numerador
y el denominador entre x^n,
donde n es la máxima
potencia
en el denominador de
la fracción

Límites al Infinito

Definición:

"La función f tiene el límite L cuando x se incrementa sin límite, lo que se escribe

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Si: dado cualquier ε>0, existe algún número M >0 tal que para toda x,

$$M<x \to |f(x)-L|<\varepsilon$$

siempre que se pueda acercar arbitrariamente f(x) a L considerando a x suficientemente grande." (Tan, 1998,p.480)

Problema:

Si el costo total de fabricación de x escritorios es C(x)=100x+200.000 dólares por año.

Evaluar $\lim_{x\to\infty} \overline{C(x)}$

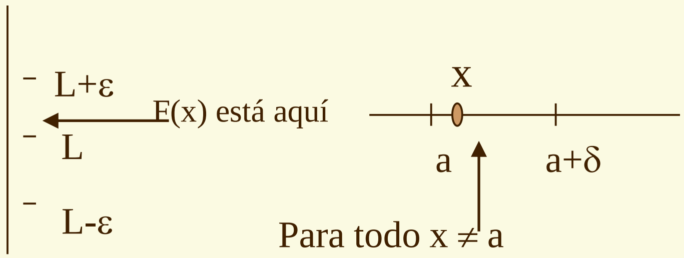
Límites Laterales

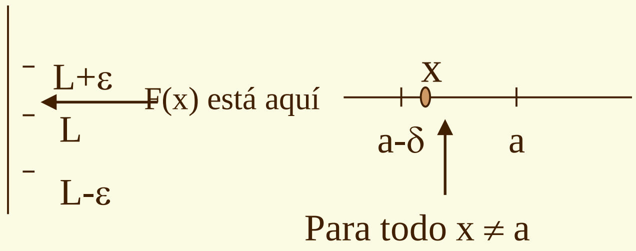
"La función f tiene el límite derecho (izquierdo) L (M) cuando x tiende a a por la derecha (izquierda), lo que se escribe

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \qquad\qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Dado cualquier ε>0 (radio en torno a L), existe un δ>0 (radio a la derecha de a) tal que, para todo x, a<x<a+ δ → | f(x)-L|<ε

Dado cualquier ε>0 (radio en torno a L), existe un δ>0 (radio a la izquierda de a) tal que, para todo x, a - δ <x<a→ | f(x)-L|<ε





Si los valores f(x) se pueden acercar a L tanto como se quiera, considerando a x bastante cerca (pero no igual) de a y a su derecha (izquierda)."(Tan, 1998,p.492)

Límites Infinitos/ Infinitésimos

Definiciones

Se f una función definida en todo número de algún intervalo abierto que contenga a , excepto posiblemente en el número a mismo. Cuando x tiende a a, f(x) crece (decrece) sin límite lo cual se escribe $lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

si para cualquier número N>0 (N<0) existe una δ>0 tal que si 0<| x-a|< δ entonces f(x)>N (f(x)<N)

Una función f tal que $lim_{x \to a} f(x) = 0$, decimos que es un infinitésimo

(UNA,1986 p. 123)

Límites Infinitos

- Teoremas

$r = entero_{positivo}$

$1. \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^r} = +\infty$

$2. \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^r} = -\infty; r = impar$

Si

$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x\to a} g(x) = c$

$Entonces:$

$3. \lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \pm\infty$

Si

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to a} g(x) = \pm c; c = constante$

$Entonces:$

$4. \lim_{x\to a}[f(x) * g(x)] = \pm\infty$

Si

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to a} g(x) = \pm c$

$Entonces:$

$5. \lim_{x\to a}[f(x) * g(x)] = \mp\infty$

Si

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$

$\lim_{x\to a} g(x) = +c$

$Entonces:$

$5. \lim_{x\to a}[g(x) / f(x)] = \pm\infty$

Si

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$

$\lim_{x\to a} g(x) = -c$

$Entonces:$

$5. \lim_{x\to a}[g(x) / f(x)] = \pm\infty$