

Bloque de Contenido N° II

Teorema de Taylor



**Realizado por:
Ing. Mixzaida Peña**

Teorema

- Sea f una función continua tal que f y sus n primeras derivadas sean continuas en $[a, b]$. Además $f^{(n+1)}(x)$ existe para toda x en (a, b) . Entonces hay un número ξ en (a, b) tal que:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (b-a) + \frac{f''(a)}{2!} (b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Si $n=0$, entonces:

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

Teorema

- Si en lugar de b se sustituye por x, se obtiene la **fórmula de Taylor o serie de Taylor**:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Esto se cumple si f y sus n primeras derivadas son continuas en un intervalo cerrado $[a,x]$, y si f^n es diferenciable en (a,x) .

Además, $(n+1)$ -ésima derivada de f debe existir para todos los puntos del correspondiente intervalo abierto.

Teorema

La fórmula anterior se puede escribir como:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

- Polinomio de Taylor de grado n de la función f en el número a :

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

- $R_n(x)$ es el residuo llamado forma de Lagrange del residuo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$$

$$P_n(x) - E \leq f(x) \leq P_n(x) + E$$

Polinomio de Maclaurin

■ Fórmula de Maclaurin ($a=x_i=0$)

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^n(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Problema: Use los términos en la serie de Taylor de cero a cuarto orden para aproximar la función:

$$f(x) = -0,1x^4 - 0,15x^3 - 0,5x^2 - 0,25x + 1,2$$

desde $x_i=0$ con $h=1$. Predecir el valor de la función en $x_{i+1}=1$

Polinomio de Taylor

Construcción del polinomio de Taylor de grado n para funciones como:

- $f(x)=\ln x$

$$P_n(x) = \ln(a) + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{a^2 2!}(x-a)^2 + \frac{2}{a^3 3!}(x-a)^3 + \dots$$

- $f(x)=\text{Sen}x$

$$P_n(x) = \text{Sen}(a) + \frac{\text{Cos}(a)}{1!}(x-a) - \frac{\text{Sen}(a)}{2!}(x-a)^2 - \frac{\text{Cos}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

- $f(x)=\text{Cos}x$

$$P_n(x) = \text{Cos}(a) - \frac{\text{Sen}(a)}{1!}(x-a) - \frac{\text{Cos}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{\text{Sen}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

- $f(x)=e^x$

$$P_n(x) = e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n$$

Polinomio de Maclaurin

■ $f(x)=e^x$

$$P_n(x) = e^0 + \frac{e^0}{1!}(x-0) + \frac{e^0}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{e^0}{n!}(x-0)^n$$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

■ $f(x)=\text{Sen } x$

$$P_n(x) = \text{Sen}(0) + \frac{\text{Cos}(0)}{1!}(x-0) - \frac{\text{Sen}(0)}{2!}(x-0)^2 - \frac{\text{Cos}(0)}{3!}(x-0)^3 + \dots$$

$$P_n(x) = 0 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Polinomio de Maclaurin

- $f(x)=\text{Cos}x$

$$P_n(x) = \text{Cos}(a) - \frac{\text{Sen}(a)}{1!}(x-a) - \frac{\text{Cos}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{\text{Sen}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$P_n(x) = \text{Cos}(0) - \frac{\text{Sen}(0)}{1!}(x-0) - \frac{\text{Cos}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{\text{Sen}(0)}{3!}(x-0)^3 + \dots$$

$$P_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Resolución de Ecuaciones no Lineales

Método de Newton- Raphson

Método de Newton

Es un método iterativo que requiere de una estimación inicial

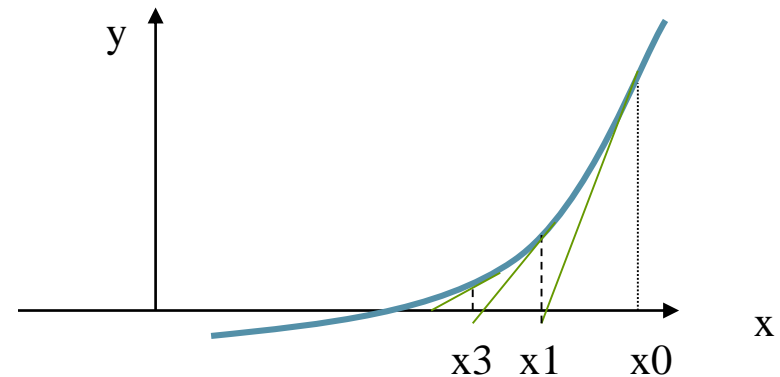
Criterio de paro

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$$

$$\varepsilon_s = \text{valor}_{\text{previamente fijado}}$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| * 100\%$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Problema:

1. Estimar la raíz de $x^3 = 3x - 1$ que se encuentra entre -1 y -2. Continúe el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0,0001.
2. Determine la raíz cúbica de $a = 155$.
3. Calcule la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$, siendo $x_0 = 0$.



Resolución de Ecuaciones no Lineales

Polinomio Lineal

Construcción e identificación de la intersección del polinomio lineal $p(x)$ con el eje de las abscisas como una raíz aproximada a la raíz x de la ecuación $f(x)=0$

Resolución de Ecuaciones no Lineales

Método de Iteración Simple de Punto Fijo

Método de Punto Fijo

Es un método iterativo que requiere de una estimación inicial

$$x = \overline{f(x)}$$

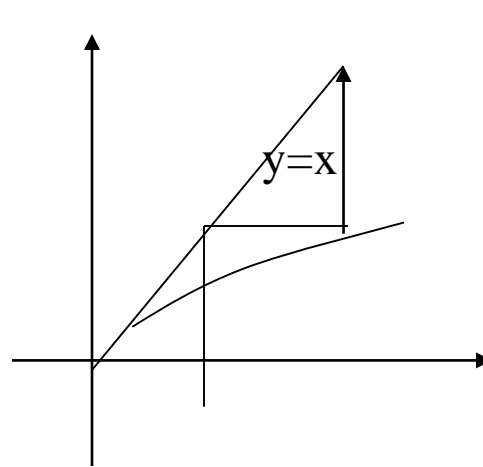
$$x^{(t)} = \overline{f}(x^{(t-1)})$$

$t = n^{\circ}$ pasos

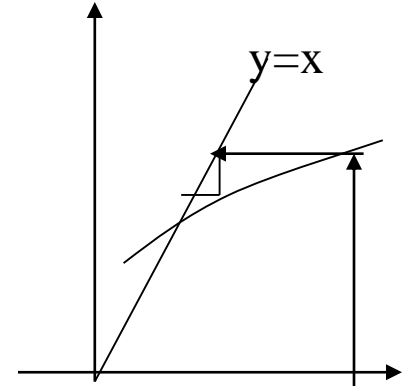
iterativos

Para garantizar la convergencia $|\overline{f}'(x)| < 1$

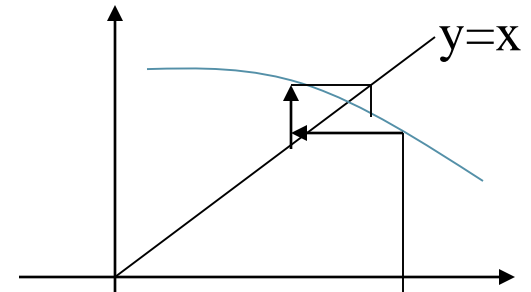
Problema: Se sabe que la función $y = x^2 - 3x + e^x - 2$, tiene dos raíces. Hallar la menor de estas.



Divergente: $1 < f'$



Convergente: $0 < f' < 1$



Converge: $-1 < f' < 0$

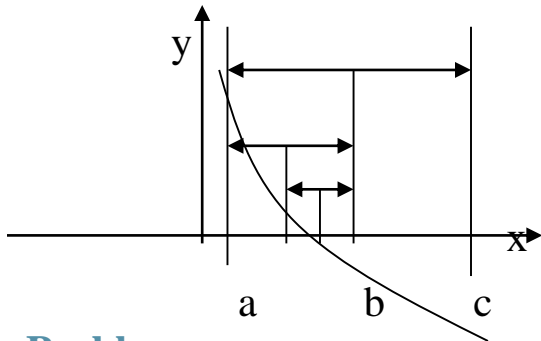
Resolución de Ecuaciones no Lineales

Método Bisección/Método de Bolzano

Método de Bisección

Es un método que necesita especificar un intervalo que contenga a la raíz.

El método puede atrapar una singularidad



Problema:

Se sabe que la raíz está en $[0,2]$.

$$e^x - 2 = 0$$

Hallar un valor aproximado.

Paso 1: Elegir a y c de forma tal que $f(a)f(c) < 0$.

Paso 2: La primera aproximación es:
$$b = \frac{(a+c)}{2}$$

Paso 3: Realizar las evaluaciones para determinar en qué subintervalo cae la raíz.

- Si $f(a)f(b) < 0$. Se toma $c=b$ y se continúa en el paso 2.

Paso 4: Si $f(a)f(b) = 0$, la raíz es igual a b; termina el cálculo.

Criterio de paro:

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$$

$\varepsilon_s = \text{valor}_{\text{previamente fijado}}$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{b^{\text{nuevo}} - b^{\text{anterior}}}{b^{\text{nuevo}}} \right| * 100\%$$



Diferenciación Numérica

Identificación y construcción de funciones definidas mediante una tabla de valores equidistante de la variables independientes.

Diferenciación Numérica

Cálculo de $f'(x_0)$ de funciones en forma tabular usando las primeras diferencias hacia delante, hacia atrás y centro.

Aproximaciones por diferencias hacia adelante

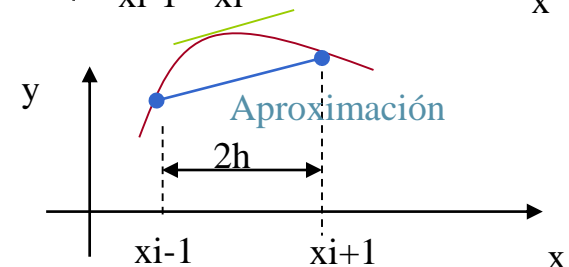
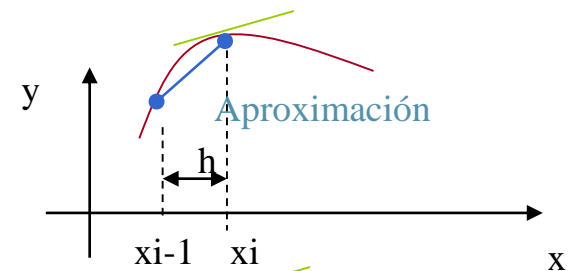
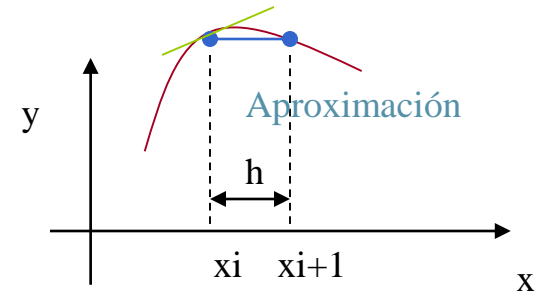
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Aproximaciones por diferencias hacia atrás

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Aproximaciones por diferencias central

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$



Problema: Estimar la f' de

$f(x) = -0,1x^4 - 0,15x^3 - 0,5x^2 - 0,25x + 1,2$ en $x = 0,5$ con $h = 0,5$

y $h = 0,25$. Usando las diferencias finitas hacia delante, atrás y centrales.

Ing. Mixzaida Peña

Diferenciación Numérica

- Cálculo de $f'(x) \approx f'_i$ y $f''(x) \approx f''_i$ con $p+n$ y $n=1,2,3,\dots$ datos, de datos, de funciones en forma tabular usando el teorema de Taylor, para establecer por truncamiento el error que se comete con la aproximación.

Problema:

Calcular la primera derivada de tg en $x=1$ mediante aproximaciones por diferencias utilizando $h=0,1$; $h=0,05$ y $0,02$.

Diferenciación Numérica

Aproximaciones por diferencias hacia adelante

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + 0(h); 0(h) = -\frac{1}{2}hf'_i$$

$$f'_i = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2h} + 0(h^2); 0(h^2) = \frac{1}{3}h^2f''''_i$$

$$f'_i = \frac{2f_{i+3} - 9f_{i+2} + 18f_{i+1} - 11f_i}{6h} + 0(h^3); 0(h^3) = -\frac{1}{4}h^3f''''''_i$$

Aproximaciones por diferencias hacia atrás

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + 0(h); 0(h) = \frac{1}{2}hf''''_i$$

$$f'_i = \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2h} + 0(h^2); 0(h^2) = \frac{1}{3}h^2f''''''_i$$

$$f'_i = \frac{11f_i - 18f_{i-1} + 9f_{i-2} - 2f_{i-3}}{6h} + 0(h^3); 0(h^3) = \frac{1}{4}h^3f''''''''_i$$

Aproximaciones por diferencias central

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + 0(h^2); 0(h^2) = -\frac{1}{6}h^2f''''''_i$$

$$f'_i = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h} + 0(h^4); 0(h^4) = \frac{1}{30}h^4f''''''''_i$$

Aproximaciones por diferencias hacia adelante

$$f''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + 0(h); 0(h) = -hf''''''_i$$

$$f''_i = \frac{-f_{i+3} + 4f_{i+2} - 5f_{i+1} + 2f_i}{2h} + 0(h^2); 0(h^2) = \frac{11}{12}h^2f''''''''_i$$

Aproximaciones por diferencias hacia atrás

$$f''_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} + 0(h); 0(h) = hf''''''_i$$

$$f''_i = \frac{2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}}{h^2} + 0(h^2); 0(h^2) = \frac{11}{12}h^2f''''''''_i$$

Aproximaciones por diferencias central

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + 0(h^2); 0(h^2) = -\frac{1}{12}h^2f''''''''_i$$

$$f''_i = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2} + 0(h^4);$$

$$0(h^4) = \frac{1}{90}h^4f''''''''''_i$$