Teoría de Conjuntos

Antonia Huertas Sanchez   María Manzano Arjona
mara@usal.es

Febrero 2002

Índice general

II Teoría de Conjuntos Axiomática 21

0.1. Prefacio

Las notas que siguen constituyen una guía para un curso básico de teoría de conjuntos. La primera parte, formada por tres capítulos, se podrían insertar en un curso de introducción de lógica, entre la lógica proposicional y la de primer orden. Si el curso se piensa dar en Facultades de Letras, se puede complementar con una serie de ejercicios aún más elementales (que estamos elaborando) cuyo objetivo es que el alumno sepa trasegar con conjuntos y relaciones concretas. No se incluyen las demostraciones, que son la parte fundamental del curso, ya que las hacemos en la pizarra. Esto no es un libro, son unos apuntes que esperamos os sean de alguna ayuda.

El bloque completo de estas notas constituye un curso de 20 horas para alumnos de primer ciclo. Por tratarse de una asignatura de las denominadas de LIBRE CONFIGURACIÓN (esto quiere decir que no es de ninguna carrera en particular, que la pueden elegir alumnos de cualquier titulación) no se puede suponer un conocimiento previo homogéneo, de ahí proviene su estilo “mestizo”.

Parte I

TEORÍA BÁSICA DE CONJUNTOS

Capítulo 1

Introducción

1.1. Pinceladas históricas

En el último cuarto del siglo XIX se vivió un episodio apasionante de la historia de las matemáticas que las ligaría desde entonces a la historia de la lógica. Primero, Georg Boole (1815-1864) en su *Mathematical Analysis of Logic* trató de presentar la lógica como parte de las matemáticas. Poco después Gottlob Frege (1848-1925) intentó mostrar que la aritmética era parte de la lógica en su *Die Grundlagen der Arithmetik*. Pero, dando un gran paso tanto en la historia de las matemáticas como en la historia de la lógica, G. Cantor se había adelantado a Frege con una fundamentación lógica de la aritmética. Cantor había demostrado que la totalidad de los números naturales comprendidos en el intervalo de extremos 0 y 1 no es numerable, en el sentido de que su infinitud no es la de los números naturales. Como una consecuencia de esa situación, Cantor creó una nueva disciplina matemática entre 1874 y 1897: la teoría de conjuntos. Su obra fue admirada y condenada simultáneamente por sus contemporáneos. Desde entonces los debates en el seno de la teoría de conjuntos han sido siempre apasionados, sin duda por hallarse estrechamente conectados con importantes cuestiones lógicas.

Según la definición de conjunto de Cantor, éste es “una colección en un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, llamados los elementos del conjunto”. Frege fue uno de los admiradores de la nueva teoría de Cantor, y dio una definición de conjunto similar.

En 1903 B. Russell demostraría que la teoría de conjuntos de Cantor era inconsistente y cuestionaría la definición de conjunto en la teoría de Cantor. Pero pronto la teoría axiomática de Zermelo (1908) y refinamientos de ésta debidos a Fraenkel (1922), Skolem (1923), von Newman (1925) y otros sentaron las bases para la teoría de conjuntos actual.

Es indiscutible el hecho de que la teoría de conjuntos es una parte de las matemáticas, es además, la teoría matemática dónde fundamentar la aritmética y el resto de teorías matemáticas. Es también indiscutible que es una parte de la lógica y en particular una parte de la lógica de predicados.

En esta historia cruzada de las matemáticas, la lógica y los fundamentos de ambas, la teoría de conjuntos permitiría por un lado una fundación logicista de las matemáticas; pero por otro lado la teoría de conjuntos mirada como parte de las matemáticas proporciona el metalenguaje, el contexto o sustrato de las teorías lógicas. Finalmente, puede ser completamente expresada en un lenguaje de primer orden y sus axiomas y teoremas constituyen una teoría de primer orden a la que pueden aplicarse los resultados generales que se aplican a cualquier teoría de primer orden.

En los capítulos que siguen se presenta primero la teoría intuitiva de conjuntos, basada en la original de Cantor, para seguir con sus problemas de inconsistencia y la solución axiomática final como la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

1.2. Teoría intuitiva de conjuntos

1.2.1. La selva de Cantor

La definición inicial de Cantor es totalmente intuitiva: *un conjunto es cualquier colección C de objetos determinados y bien distintos x de nuestra percepción o nuestro pensamiento (que se denominan elementos de C), reunidos en un todo.* Igual que en Frege su idea de lo que es un conjunto coincide con la extensión de un predicado (la colección de objetos que satisface el predicado).

Esta idea sencilla y tan intuitiva resulta ser también ingenua porque produce enormes contradicciones de inmediato, como por ejemplo la *paradoja de Russell.* Para poder mostrarlo es necesario empezar por formalizar esta teoría intuitiva que, aparte de los símbolos para los conjuntos y sus elementos (x, C, etc.), tendrá los símbolos de pertenencia $\in$ e igualdad $=$ (de los objetos del lenguaje formal). Que x es un elemento del conjunto C se expresa "*x pertenece a C*" o bien $x \in C$.

Que x no es un elemento de C se expresa "*x no pertenece a C*" ($x \notin C$).

Tendremos en cuenta que no es necesario denotar siempre con mayúsculas a los conjuntos y con minúsculas a sus elementos, ya que un conjunto puede ser a su vez un elemento de otro conjunto e incluso podemos considerar que en nuestra teoría no hay objetos que no sean conjuntos.

¿Cómo se determina una colección?

- *Listar los objetos.* De acuerdo con la definición intuitiva de Cantor un conjunto queda definido si es posible describir completamente sus elementos. El procedimiento más sencillo de descripción es nombrar cada uno de sus elementos, se llama *definición por extensión;* es conocida la notación de encerrar entre llaves los elementos del conjunto.

  Ejemplo:

  $A = \{a, b, c\}$. Donde A es el conjunto formado por la colección de objetos

a, b y c.

$B = \{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash, \odot\}$. Donde B es el conjunto formado exactamente por esos cinco círculos.

Entonces es cierto que $b \in A$ y que $b \notin B$.

El inconveniente para este método de listado o enumeración de los elementos del conjunto es que éstos deben poseer un número finito de elementos y, en la práctica, un número muy pequeño

¿Qué hacer cuando la colección es infinita, o cuando es finita pero numerosa?

Describir los objetos. Cuando el número de elementos del conjunto es infinito (como el de los número impares) o demasiado numeroso (como el de todas las palabras que pueden formarse con el alfabeto latino) se utiliza el método de *definición por intensión,* que consiste en la descripción de un conjunto como la *extensión de un predicado,* esto es, mediante una o varias propiedades (el predicado) que caracterizan a los elementos de ese conjunto.

En principio podría tomarse cualquier lengua natural para describir los objetos (español, inglés, italiano, vasco, catalán, etc), sin embargo es preferible utilizar un *lenguaje formal* que ofrezca rigor y precisión. Dicho lenguaje debe ser suficientemente rico; esto es, lo suficientemente expresivo como para poder describir *todas* las colecciones matemáticas. Pero también lo suficientemente restrictivo como para limitarse a *sólo* las colecciones de objetos matemáticos. Para expresar predicados utilizaremos el lenguaje formal de la la lógica de predicados de primer orden (el lenguaje de la lógica de proposiciones con los símbolos lógicos de las conectivas $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ más los cuantificadores universal $\forall$ y existencial $\exists$) al que se añade variables, igualdad y el relator binario de pertenencia. Este lenguaje puede ser ampliado con los símbolos propios de las operaciones, relaciones o funciones del lenguaje específico de teoría de conjuntos.

En la primera parte, al presentar la Teoría básica de conjuntos, utilizaremos con frecuencia el lenguaje natural para describir propiedades. Estas propiedades pueden ser aritméticas ($<$, $\leq$, $/$, etc.) o matemáticas en general, pero también pueden ser propiedades expresadas en lenguaje natural (nombres, verbos,...) que describan colecciones no estrictamente matemáticas.

Ejemplo:
$C = \{x \in \omega /\ 0 < x < 230000 \wedge 2/x\}$, donde ω es el conjunto de los números naturales con la ordenación habitual, $<$ significa "menor que" y $2/x$ significa que "2 divide a x".
$D = \{x/\ x$ es una palabra de 2 letras del alfabeto griego (pueden estar repetidas)$\}$
$E = \{x/\ P_2(x) \vee P_3(x) \vee \cdots \vee P_{10}(x)\}$. Donde $P_i(x)$ significa "x es una palabra de i letras del alfabeto griego (pueden estar repetidas).

1.2.2. Problemas en la teoría intuitiva de conjuntos: la paradoja de Russell

Pero la definición intuitiva de conjunto como el de una colección de objetos 'describible' por un predicado conduce inevitablemente a ciertas contradicciones que se llaman paradojas, la más célebre es la conocida como paradoja de Russell:

Consideremos el conjunto $A = \{x : x \notin x\}$, descrito mediante el predicado del lenguaje formal $x \notin x$. Obviamente, para cualquier B, $B \in A$ si y sólo si $B \notin B$. Es decir, está en A cuando verifica las condiciones que definen a A. Pero, ¿qué sucede con el propio A? Evidentemente, $A \in A$ si y sólo si $A \notin A$. Pero este resultado es contradictorio. En vano se debe intentar descubrir un error en el razonamiento, más bien parece que el problema proviene de admitir expresiones como $A \in A$ (o conjuntos como el conjunto de todos los conjuntos que produce también paradojas).

Se ha visto claramente que el concepto de conjunto no es tan sencillo y que identificarlo sin mayor investigación con el de colección resulta problemático. Para evitar la paradoja de Russell, y otras de esta naturaleza, es necesario tener más cuidado en la definición de conjunto, lo veremos en lo que sigue. Otras paradojas, de hecho las primeras en descubrirse, afectaban a colecciones grandes, como por ejemplo la de los ordinales, o la de todos los conjuntos. Estas colecciones no podrán ser conjuntos.

1.2.3. Solución de las paradojas

Una solución radical al problema de las paradojas es la propuesta en 1903 por Russell, su *Teoría de Tipos*. Observa que en todas las paradojas conocidas hay una componente de reflexividad, de circularidad. Técnicamente se evitan las paradojas al eliminar del lenguaje las formaciones circulares. Se reconoce que nuestro universo matemático no es plano, sino jerarquizado, por niveles, y que el lenguaje más adecuado para hablar de un universo ?? debe tener diversos tipos de variables que correspondan a cada nivel; en particular, la relación de pertenencia se dá entre objetos de distinto nivel.

En 1908 Zermelo da como solución la *definición axiomática de la Teoría de Conjuntos*, refinada más tarde por Fraenkel, Skolem, von Neumann y otros. En esta teoría se evita que las colecciones que llevaban a las paradojas puedan ser conjuntos. De hecho, en la solución de Zermelo-Fraenkel, una colección de objetos será un conjunto si los axiomas la respaldan. Dichos axiomas permiten formar conjuntos a partir de conjuntos previamente construídos y postulan la existencia del $\emptyset$ y de al menos un conjunto infinito. Sin embargo, en la solución de von Neumann se admiten colecciones que no son conjuntos, las denominadas clases últimas. Se definen clases mediante propiedades, sin restricción, pero habrá que mostrar que se trata de conjuntos viendo que pertenecen a alguna clase. Las clases últimas, como la clase universal o la de los ordinales, no pertenecen a ninguna otra clase.

1.3. El Universo matemático

La idea intuitivamente más fructífera y también la más extendida es que nuestro universo matemático, -esto es, el que contiene todas las colecciones de objetos matemáticos, pero solamente los objetos matemáticos- constituye una jerarquía de conjuntos, la denominada Jerarquía de Zermelo.

En la construcción de los conjuntos que formarán la jerarquía se parte de una colección inicial M_0 de objetos dados y a continuación se construye una colección M_1 de conjuntos de elementos de M_0, después una colección M_2 de conjuntos de objetos de M_0 y M_1, etc.

??, el universo de conjuntos construídos es una jerarquía. Para proporcionar mayor precisión debemos responder a las preguntas siguientes:

1. ¿Cúal será nuestra colección de partida, M_0?

2. ¿Qué conjuntos de objetos de niveles inferiores se toman para formar nuevos niveles en la jerarquía?

3. ¿Hasta dónde se extiende esta jerarquía?.

Para responder a la primera pregunta debemos considerar si nos interesa tomar objetos que no sean conjuntos o si nos basta con partir de un primer nivel que sea sencillamente el conjunto $\emptyset$. Está claro que ??se toman sólo objetos matemáticos, pero habrá que ver que es suficiente y que podremos finalmente contar en la jerarquía con todos los objetos matemáticos.

Una respuesta a la segunda pregunta que parece razonable es, al ir tomando nuevos conjuntos, que éstos se puedan describir con nuestro lenguaje. Al tomar esta opción formamos la Jerarquía de conjuntos constructibles. Otra posibilidad es tomar como objetos de un nuevo nivel a todos los posibles. Veremos que esta es la opción de Zermelo.

Finalmente, la tercera de las preguntas es hasta donde se extiende la jerarquía. La respuesta es que la jerarquía de conjuntos no tiene fin, siempre se pueden construir nuevos niveles.

Para precisar un poco más esta imagen intuitiva de nuestro Universo matemático es conveniente contar con algunas nociones de teoría de conjuntos básica y con el concepto de ordinal. Por ello volveremos sobre este tema cuando tengamos el equipamiento necesario.

1.4. Teoría axiomática de conjuntos

Recordemos los componentes de una teoría axiomática:

1. El lenguaje o símbolos formales de la teoría.

2. Los axiomas, que son proposiciones acerca de los objetos de la teoría y que imponen el funcionamiento de dichos objetos.

3. Los teoremas, que son todas las proposiciones demostrables con herramientas lógicas a partir de los axiomas.

En la teoría de conjuntos axiomática de Zermelo Fraenkel se usará el lenguaje formal de la lógica de predicados de primer orden. Las variables de dicho lenguaje formal se referirán a conjuntos; es decir, en la interpretación usual todos los objetos son conjuntos. Es decir, *existir* será sinónimo de *ser un conjunto.* El lenguaje básico sólo tiene el relator binario de pertenencia, pero se extiende, mediante definiciones pertinentes, para dar cabida a operaciones.

Los conceptos primitivos de esta teoría son el de conjunto y el de pertenencia. En realidad la mayoría de los axiomas sirven para garantizar la existencia de los conjuntos que nos interesa tener. Por ello la idea de *construcción* es esencial en la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel (que notaremos ZF).

En la teoría axiomática de conjuntos se respeta la idea fundamental de aceptar que una colección de objetos pueda ser un conjunto, pero se impone la condición de que todos los objetos de una colección deben haberse formado antes de definir dicha colección, y de esta manera se evitarán los problemas que conducen a las paradojas. Uno de los axiomas de la teoría (se verá más adelante) impondrá esta restricción: "Si X es un conjunto ya construido existe un conjunto Y formado por los elementos de X que satisfacen un predicado P que los describe (o lo que es lo mismo, una fórmula con al menos una variable libre)". Así un predicado describirá un conjunto sólo si los objetos han sido ya construidos (son de otro conjunto X) y además satisfacen el predicado.

Con esta restricción a la definición de conjunto de Cantor desaparece la paradoja de Rusell ya que para que $A = \{x : x \notin x\}$ sea un conjunto se debería tener un conjunto X a partir del cual construirse; es decir, $A = \{x \in X : x \notin x\}$.

¿Cómo se resuelve la paradoja? Al construirse a partir de un conjunto ya construido desaparece el problema. Ahora, para cualquier B se verifica: $B \in A$ si y sólo si $B \in X$ y $B \notin B$. En realidad, puesto que la condición $B \notin B$ la cumplen todos, A será el propio X. Además, es imposible que exista el conjunto de todos los conjuntos.

Los teoremas de ZF se derivan de los axiomas, pero para que tengan interés deben mediar definiciones de conceptos y operaciones nuevas. Aunque en principio podría usarse un cálculo deductivo de primer orden, en la práctica resulta desaconsejable pues en él cualquier demostración se alargaría en exceso.

Capítulo 2

Álgebra de Conjuntos

2.1. El lenguaje de la Teoría de Conjuntos

A continuación presentamos el lenguaje de primer orden $L_\in$ en el que escribiremos la Teoría de Conjuntos. Puede entenderse de dos maneras distintas: como lenguaje formal y como abreviaturas de expresiones en español. Esta segunda interpretación será posiblemente la conveniente en un curso introductorio, antes de conocer la lógica de primer orden.

Los símbolos del lenguaje formal de la teoría de conjuntos serán:

- Los *símbolos de conjuntos* serán las letras del alfabeto, mayúsculas y minúsculas.

- El símbolo de la relación de *pertenencia* entre conjuntos es $\in$.

- Los *símbolos lógicos* de la lógica de predicados: $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\rightarrow$ (implicación), $\leftrightarrow$ (equivalencia), $\forall$ (cuantificador universal) y $\exists$ (cuantificador existencial) y $($, $)$ (paréntesis).

Con estos signos básicos se generan todas las fórmulas de la teoría de conjuntos. Las reglas de formación de fórmulas son las habituales en la lógica de primer orden. A saber:

1. $x \in y$ y $x = y$ son fórmulas. Para cualesquiera variables x, y.

2. Si φ y ψ son fórmulas, también lo son: $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$

3. Si φ es una fórmula, $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$ tambien lo son.

FORM$(L_\in)$ se generan mediante las reglas precedentes:

2.2. Igualdad, inclusión y conjunto vacío

Definiciones:

- $A \notin B$ es la abreviación de *no pertenencia* $\neg(A \in B)$
- *Igualdad (Axioma de extensionalidad).* $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B$ "Si todo elemento lo es de A si y sólo si lo es también de B entonces A y B coinciden".
- *Inclusión, subconjunto*: $A \subseteq B$ "A está incluido en B" (A es *subconjunto* de B), es una abreviatura de $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$) (todo elemento de A es elemento de B).
- *Inclusión estricta*: $A \subset B$ es una abreviatura de $(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$.
- *Conjunto vacío:* $\emptyset$ es el único conjunto tal que $\forall x(x \notin \emptyset)$ "para todo x, x no pertenece a $\emptyset$" (ningún elemento pertenece a $\emptyset$)'

Teoremas: Los resultados siguientes son teoremas que se deducen de manera directa de las definiciones anteriores

1. $\forall A(\emptyset \subseteq A)$
2. $\forall A\,(A \subseteq A)$
3. $\forall AB\,((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \rightarrow (A = B))$
4. $\forall ABC\,((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow (A \subseteq C))$

2.3. Operaciones

Definiciones

- *Unión.* $A \cup B = \{x/\ (x \in A) \vee (x \in B))\}$ *A unión B* está formado por los elementos que están en A o en B. Se verifica: $\forall x(x \in A \cup B \leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B))$
- *Intersección* $A \cap B = \{x/\ (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ *A intersección B* está formado por los elementos que están en A y también en B. Se verifica: $\forall x(x \in A \cap B \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B))$
- *Diferencia* $A - B = \{x/\ (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ *A menos B* está formado por los elementos que están en A pero no en B. Se verifica: $\forall x(x \in A - B \leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B))$

Teoremas

1. $\forall AB\ (A \subseteq A \cup B)$
2. $\forall AB\ (A \cap B \subseteq A)$
3. $\forall AB\ ((A \subseteq B) \leftrightarrow (A \cup B = B))$
4. $\forall AB\ ((A \subseteq B) \leftrightarrow (A \cap B = A))$
5. $\forall A\ (A \cup A = A)$. *Idempotencia.*
6. $\forall A\ (A \cap A = A)$. *Idempotencia.*
7. $\forall AB\ (A \cap (A \cup B) = A)$. *Absorción.*
8. $\forall AB\ (A \cup (A \cap B) = A)$. *Absorción.*
9. $\forall AB\ (A \cup B = B \cup A)$. *Commutatividad.*
10. $\forall AB\ (A \cap B = B \cap A)$. *Commutatividad.*
11. $\neg\forall AB\ (A - B = B - A)$
12. $\forall A\ (\emptyset - A = \emptyset)$
13. $\forall A\ (A \cup \emptyset = A)$
14. $\forall A\ (A \cap \emptyset = \emptyset)$
15. $\forall ABC\ ((A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C))$. *Asociatividad.*
16. $\forall ABC\ ((A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C))$. *Asociatividad.*

Capítulo 3

Relaciones y Funciones

3.1. Clases unitarias, pares y díadas

Definiciones

- *Par desordenado.* $\{x, y\} = \{z/\ (z = x) \vee (z = y)\}$; es el conjunto formado por los elementos x, y.

- *Clase unitaria.* $\{x\} = \{x, x\}$

Notación: $\{x, y, z\} = \{x, y\} \cup \{z\}$.

- *Par ordenado.* $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Teoremas

1. $\forall xyzv\ ((\{x, y\} = \{z, v\}) \to ((x = z\ \wedge\ y = v) \vee (x = v\ \wedge\ y = z)))$

2. $\forall xy\ (x = y \to \langle x, y\rangle = \{\{x\}\})$

3. $\forall xyzv\ (\langle x, y\rangle = \langle z, v\rangle \to (x = z\ \wedge\ y = v))$

3.2. Conjunto potencia (o conjunto de las partes de un conjunto)

Definición

- *Partes de un conjunto.* $\mathfrak{P}A = \{C/\ C \subseteq A\}$, *partes de* A está formado por los subconjuntos de A.

Teoremas

1. $\forall A\ (\emptyset \in \mathfrak{P}A)$
2. $\forall A\ (A \in \mathfrak{P}A)$
3. $\forall AB\ ((\mathfrak{P}A \cup \mathfrak{P}B) \subseteq \mathfrak{P}(A \cup B))$
4. $\forall AB\ (\mathfrak{P}A \cap \mathfrak{P}B = \mathfrak{P}(A \cap B))$

3.3. Gran unión y gran intersección

Definiciones

- *Gran unión.* $\bigcup \mathfrak{A} = \{x \mid \exists A\ (A \in \mathfrak{A} \ \wedge\ x \in A)\}$. La *gran unión del conjunto* $\mathfrak{A}$ está formado por los objetos que son elementos de algún elemento de $\mathfrak{A}$.
- *Gran intersección.* $\bigcap \mathfrak{A} = \{x \mid \forall A\ (A \in \mathfrak{A} \ \rightarrow\ x \in A)\}$. La *gran intersección* del conjunto $\mathfrak{A}$ está formado por los objetos que son elementos de todos los elemento de $\mathfrak{A}$.

Convención: $\bigcap \emptyset = \emptyset$

Teoremas

1. $\forall AB\ (\bigcup \{A, B\} = A \cup B)$
2. $\forall AB\ (\bigcap \{A, B\} = A \cap B)$
3. $\forall \mathfrak{A} A\ ((A \in \mathfrak{A}) \rightarrow (A \subseteq \bigcup \mathfrak{A}))$
4. $\forall A\ (\bigcup \mathfrak{P}A = A)$

3.4. Producto cartesiano

Definición *Producto cartesiano de dos conjuntos.* $A \times B = \{z \mid \exists uv(z = \langle u, v\rangle \ \wedge\ u \in A \ \wedge\ v \in B)\}$

Está formado por los pares ordenados cuyos primera componente es de A y la segunda de B.

Teoremas

1. $\forall ABC\ (A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C))$
2. $\forall ABCD\ ((A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D))$
3. $\forall ABC\ ((A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C))$
4. $\forall AB\ (A \times B \subseteq \mathfrak{P}\mathfrak{P}(A \cup B))$

3.5. Relaciones binarias

Definiciones

- *Relación binaria.* Una relación binaria es una clase de pares ordenados. $\forall R(R$ es una relación $\rightarrow \exists yz\ (x = \langle y, z \rangle))$.
  La llamaremos simplemente *relación.*
- *Dominio. Dom* $R = \{x \mid \exists y\ \langle x, y \rangle \in R\}$
- *Rango. Rang* $R = \{x \mid \exists y\ \langle y, x \rangle \in R\}$
- *Campo. Camp* $R =$ *Rang* $R \cup$ *Dom* R

Teoremas Los resultados siguientes son teoremas que se deducen de manera directa de las definiciones anteriores.

1. $\emptyset$ es un relación
2. $\forall R\ ((R$ es una relación$)\ \rightarrow\ (R \subseteq (Dom\ R \times Rang\ R)))$
3. $\forall RS\ ((R$ es una relación $\wedge\ S \subseteq R)\ \rightarrow\ (S$ es un relación$))$
4. $\forall RS\ ((R$ es una relación $\wedge\ S$ es una relación$) \rightarrow\ ((R \cup S$ es una relación$)$ $\wedge\ (R \cap S$ es una relación$)\ \wedge\ (R - S$ es una relación$)))$
5. $\forall RS\ (Dom\ (R \cup S) = (Dom\ R \cup Dom\ S))$
6. $\forall RS\ (Dom\ (R \cap S) \subseteq (Dom\ R \cap Dom\ S))$
7. $\forall RS\ (Dom\ (R - S) \supseteq (Dom\ R - Dom\ S))$
8. $\forall \mathfrak{A}((\forall A(A \in \mathfrak{A} \rightarrow A$ es relación$)) \rightarrow\ (\bigcap \mathfrak{A}$ es relación $\wedge \bigcup \mathfrak{A}$ es relación$))$

3.6. Relación inversa, producto relativo y restricción

Definiciones

- *Relación inversa.* $R^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R\}$
- *Producro relativo.* $R/S = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z\ (\langle x, z \rangle \in R\ \wedge\ \langle z, y \rangle \in S\}$
- *Restricción de una relación a un conjunto.* $R \upharpoonright A = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R\ \wedge\ x \in A\}$

Teoremas

1. $\forall xy\ \ (\langle x, y \rangle \in R^{-1} \leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R)$
2. $\forall R\ (R^{-1}$ es una relación$)$
3. $\forall R\ (\ (R^{-1})^{-1} \subseteq R\ )$
4. $\forall R\ (\ R$ es una relación $\rightarrow R = (R^{-1})^{-1})$

3.7. Imagen bajo una relación y relación identidad.

Definiciones

- *Imagen de A bajo R.* $R[A] = Rang\ R \restriction A$
- *Identidad sobre A.* $I_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$

Teoremas

1. $\forall x\ ((x \in R[A]) \leftrightarrow (\exists y\ (\langle y, x\rangle \in R \wedge y \in A)))$
2. $\forall RAB\ (R[A \cup B] = R[A] \cup R[B])$
3. $\forall RAB\ ((R[A \cap B]) \subseteq (R[A] \cap R[B]))$
4. $\forall RAB\ (R[A \cup B] = R[A] \cup R[B])$
5. $\forall RAB\ ((R[A - B] \supseteq (R[A] - R[B])$
6. $\exists RAB\ (R[A \cap B] \neq R[A] \cap R[B])$

3.8. Propiedades de ciertas relaciones

Definiciones

- R es *reflexiva* si y sólo si $\forall x\ ((x \in Camp\ R) \rightarrow (\langle x, x\rangle \in R))$
- R es *simétrica* si y sólo si $\forall xy\ (((\langle x, y\rangle \in R) \rightarrow (\langle y, x\rangle \in R))$
- R es *transitiva* si y sólo si $\forall xyz\ (((\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R) \rightarrow (\langle x, z\rangle \in R))$
- R es *irreflexiva* si y sólo si $\forall x\ ((x \in Camp\ R) \rightarrow (\langle x, x\rangle \notin R))$
- R es *asimétrica* si y sólo si $\forall xy\ (((\langle x, y\rangle \in R) \rightarrow (\langle y, x\rangle \notin R))$
- R es *intransitiva* si y sólo si $\forall xyz\ (((\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R) \rightarrow (\langle x, z\rangle \notin R))$
- R es *antisimétrica* si y sólo si$\forall xy\ (((\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R) \rightarrow (x = y))$
- R está *conectada* syss $\forall xy\ ((x, y \in Camp\ R) \wedge x \neq y) \rightarrow ((\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R))$
- R está *fuertemente conectada* syss $\forall xy((x, y \in Camp) \rightarrow (\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R))$
- R es *euclídea* syss $\forall xyz\ (((\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, z\rangle \in R) \rightarrow (\langle y, z\rangle \in R))$
- R es *incestuosa* syss $\forall xyz(((\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, z\rangle \in R) \rightarrow (\exists u(\langle y, u\rangle \in R \wedge \langle z, u\rangle \in R)))$

Teoremas

1. $\forall R$ ((R es asimétrica) $\rightarrow$ (R es antisimétrica))

2. $\forall R$ ((R esta fuertemente conectada) $\rightarrow$ (R esta conectada))

3.9. Relaciones de equivalencia

Definiciones

- R es una *relación de equivalencia* si y sólo si R es una relación y R es reflexiva, simétrica y transitiva

- R es una *relación de equivalencia sobre* A si y sólo si $Camp\ R = A$ y R es una relación de equivalencia

- *Clase de equivalencia de* $x \in Camp\ R$ *según* R : $[x]_R = \{y \mid \langle y, x\rangle \in R\}$

- *Cociente.* Si R una equivalencia sobre A , el *cociente* de A por R es $A_{/R} = \{[x]_R \mid x \in A\}$

- *Particiones.* H es una partición de A si y sólo si

$$\forall x\ (x \in H \rightarrow x \neq \emptyset)\ \wedge\ \forall xy\ (x, y \in H\ \wedge\ x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)\ \wedge\ \bigcup H = A$$

- *Relación de equivalencia asociada a una partición.* Si H es una partición se define la relación de equivalencia:

$$R_H = \{\langle x, y\rangle \mid \exists B\ (B \in H\ \wedge\ x \in B\ \wedge\ y \in B)\}$$

Teoremas Los resultados siguientes son teoremas que se deducen de manera directa de las definiciones anteriores.

1. $\forall R$ ((R es una relación de equivalencia) $\rightarrow$ $(\forall xy(x, y \in CampR \rightarrow ((\langle x, y\rangle \in R) \leftrightarrow ([x]_R = [y]_R)))$

2. $\forall R$ ((R es una relación de equivalencia sobre A) $\rightarrow$ ($[A]_{/R}$ es una partición de A))

3. $\forall H$ ((H es una partición de A) $\rightarrow$ (R_H es una relación de equivalencia sobre A))

4. $\forall \mathfrak{A}(\forall R(((R \in \mathfrak{A}) \rightarrow (R$ es de equivalencia)) $\rightarrow$ ($\bigcap \mathfrak{A}$ es de equivalencia))

3.10. Relaciones de Orden

Definiciones

- R es una *relación de orden (parcial)* si y sólo si R es una relación y R es reflexiva y antisimétrica y transitiva
- R es un *orden (parcial)* sobre A si y sólo si $Camp\ R = A$ y R es una relación de orden
- R es un *orden lineal* si y sólo si R es una relación de orden y R esta conectada
- R es un *orden lineal sobre* A si y sólo si $Camp\ R = A$ y R es una relación de orden lineal
- Un *conjunto parcialmente ordenado* es un par $\langle A, R\rangle$ formado por un conjunto A y un orden parcial sobre A.
- Un *conjunto linealmente ordenado* es un par $\langle A, R\rangle$ formado por un conjunto A y un orden lineal sobre A.
- Sea $\langle A, R\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $Y \subseteq A$.

Un elemento $a \in Y$ es un *elemento minimal* de Y si y sólo si $\neg\exists x(x \in Y \wedge \langle x, a\rangle \in R)$.

Un elemento $a \in Y$ es *primer elemento* de Y (*mínimo* de Y) si y sólo si $\forall x(x \in Y \rightarrow \langle a, x\rangle \in R)$.

- Un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, R\rangle$, está *bien fundado* si cada subconjunto no vacio de A posee elemento minima.
- Cuando $\langle A, R\rangle$ está linealmente ordenado y bien fundado decimos que está *bien ordenado.*

Notación*:* Habitualmente escribiremos $\leq$ en vez de R para relaciones de orden, y $\langle A, \leq\rangle$ para conjuntos ordenados tanto parcial como linealmente.

Teoremas

1. $\forall R$ ((R es un orden lineal) $\rightarrow$ (R es un orden parcial))
2. Si $\langle A, \leq\rangle$ esta linealmente ordenado y $Y \subseteq A$ entonces (a es elemento minimal de Y si y sólo si a es primer elemento de Y)
3. $\langle A, \leq\rangle$ está bien ordenado syss (para cada $Y \subseteq A$ se cumple $\exists x(x \in Y \wedge x$ es primer elemento de Y))
4. Sea $\langle A, \leq\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. $\langle A, \leq\rangle$ esta bien fundado syss no hay ninguna sucesion $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos de A tal que $a_{n+1} < a_n$ para cada n (no hay $a_0 > a_1 > a_2 > ...$)

3.11. Funciones, composición

Definiciones

- *Función.* f es una función si y sólo si f es una relación y $(\forall xyz(((\langle x,y\rangle \in f) \wedge (\langle x,z\rangle \in f)) \rightarrow (y=z)))$
- *Composición:* $f \circ g = g/f$

Notación: Si f es una función notaremos $f(x)=y$ para indicar $\langle x,y\rangle \in f$

Teoremas

1. $\forall Af\ ((f$ es una función $\wedge\ A \subseteq f) \rightarrow (A$ es una función$))$
2. $\forall Af\ ((f$ es una función $) \rightarrow (f \restriction A$ es una función$))$
3. $\forall fg\ ((f$ es una función $\wedge\ g$ es una función $) \rightarrow (f \cap g$ es una función$))$
4. $\forall fg\ ((f$ es una función $\wedge\ g$ es una función $) \rightarrow (f/g$ es una funcion$))$
5. $\forall fg\ ((f$ es función $\wedge\ g$ es función $\wedge\ \mathit{Dom}\ f \cap \mathit{Dom}\ g = \emptyset) \rightarrow (f \cup g$ es función$))$
6. $\forall f\ ((f$ es función $\wedge\ \forall z\ (z \in \mathit{Rang}\ f\ \wedge\ \langle x,z\rangle \in f\ \wedge\ \langle y,z\rangle \in f \rightarrow x = y)) \rightarrow f^{-1}$ es una función$)$
7. $\forall fg\ ((f$ es función $\wedge\ g$ es función$) \rightarrow (f \circ g$ es función$))$
8. $\forall fgx\ ((f$ es función $\wedge\ g$ es función $\wedge\ x \in \mathit{Dom}(f \circ g)) \rightarrow ((f \circ g)(x) = f(g(x))))$

3.12. Funciones de A en B

Definiciones

- f es una *función de A en B* si y sólo si f es una función y $\mathit{Dom}\ f = A$ y $\mathit{Rang}\ f \subseteq B$

Notacion: para indicar que f es una funcion de A en B escribiremos $f : A \longrightarrow B$

- f es una *funcion inyectiva* si y sólo si f es una función y $(\forall xyz\ (\langle x,y\rangle \in f\ \wedge\ \langle z,y\rangle \in f \rightarrow x = z))$
- $f : A \longrightarrow B$ es *exhaustiva* si y sólo si $\mathit{Rang}\ f = A$
- $f : A \longrightarrow B$ es *biyectiva* si y sólo si f es inyectiva & exhaustiva

Notacion: A^B denotará el conjunto de todas las funciones de B en A

Teoremas

1. $\forall f\ ((f \text{ es inyectiva }) \leftrightarrow\ (f \text{ es una función} \wedge\ f^{-1} \text{ es una función}))$
2. $\forall fxy\ (((f \text{ es inyectiva}) \wedge (x, y \in Dom\ f)) \rightarrow ((f(x) = f(y) \rightarrow (x = y)))$
3. $\forall fg\ ((f \text{ es inyectiva} \wedge g \text{ es inyectiva }) \rightarrow (f \circ g \text{ es inyectiva}))$

Parte II

Teoría de Conjuntos Axiomática

Capítulo 4

Primeros Axiomas

Los axiomas de la teoría *ZF* son propiedades indemostrales que se aceptan como verdaderas y que tienen por objeto garantizar que en la Jerarquía de Conjuntos *ZF* todo lo construído son conjuntos y así evitar las paradojas.

4.1. Axiomas de Extensionalidad y de Separación

Definición

- *Axioma de Extensionalidad:* $\forall AB\ (A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Este axioma asegura que el símbolo lógico $=$ para la igualdad de objetos de la teoría coincide con la intuición de que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

- *Axioma de Separación*: $\forall A \exists B(x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))$. Expresa que si $\varphi(x)$ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos, con a lo sumo la variable x libre y A es un conjunto, entonces la clase (colección) $\{x/x \in A \wedge \varphi(x)\}$ es un conjunto. El axioma de separación obliga a que los conjuntos estén formados de elementos de conjuntos ya construídos. Hay que observar que más que un sólo axioma es un esquema de axiomas, ya que tenemos un axioma para cada predicado.

4.2. Axiomas del Par, de la Unión y de las Partes

Definición

- *Axioma del Par:* $\forall A \forall B \exists C(\forall x(x \in C \leftrightarrow x = A\ \vee\ x = B)$. Expresa que si A y B son conjuntos entonces la clase $\{A, B\}$ es un conjunto.

En particular, si A es un conjunto entonces la clase $\{A\}$ es un conjunto (por *extensionalidad*). Este axioma asegura que las colecciones de conjuntos son conjuntos.

- *Axioma de la Unión:* $\forall A \exists B(\forall x(x \in B \leftrightarrow \exists y(y \in A \wedge x \in y)))$. Expresa que si A es un conjunto la reunión de A, $\bigcup A$, es un conjunto.

- *Axioma de las Partes:* $\forall A \exists B(\forall x(x \in B \leftrightarrow x \subseteq A))$. Si A es un conjunto, entonces las partes de A, $\mathfrak{P}A$, es un conjunto.

Teorema A partir de los cinco primeros axiomas se obtienen los resultados siguientes que nos garantizan que las clases definidas con anterioridad son conjuntos.

1. Si A y B son conjuntos entonces $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $\{A, B\}$, $\mathfrak{P}A$, $\bigcup A$, $\bigcap A$ son conjuntos. Es consecuencia inmediata de los axiomas.

2. Si A y B son conjuntos entonces $A \times B$ es un conjunto. Es consecuencia de que $A \times B \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B)$ y de los axiomas de Reunión y de las Partes.

3. Como consecuencia de 2 las relaciones obtenidas a partir de productos cartesianos también serán conjuntos.

Lo que no se puede deducir a partir de los axiomas anteriores es que la imagen por una función de un conjunto sea un conjunto. Necesitamos un nuevo axioma para ello.

4.3. Axioma de Reemplazamiento

- *Axioma de Reemplazamiento:*

$$\forall x \exists ! y \varphi(x, y) \rightarrow \forall A \exists B \forall y(y \in B \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \varphi(x, y))$$

Expresa que la imagen de un conjunto por una función es un conjunto.

Capítulo 5

Construcción de los Ordinales

5.1. Buenos órdenes e inducción

Se ha visto que en un conjunto bien ordenado todos los subconjuntos no vacíos tienen un primer elemento. El teorema de inducción es una consecuencia de esta importante propiedad, a continuación lo enunciaremos para conjuntos bien ordenados arbitrarios y veremos también versiones del teorema de inducción para el conjunto de los números naturales.

Lo que hace que funcione el principio de inducción matemática

$$[\mathcal{P}(0)\&\forall n(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \forall n\mathcal{P}(n)]$$

es el buen orden de los naturales.

Supongamos que no todos los naturales tienen la propiedad $\mathcal{P}$;es decir,

$$\{n \mid \neg\mathcal{P}(n)\} \neq \emptyset.$$

Por el buen orden de los naturales habría un primer elemento de este conjunto; es decir habría un m para el que valdría $\neg\mathcal{P}(m)$ pero también, por ser m el primer elemento, valdría $\mathcal{P}(m-1)$.

Esto es justamente lo que queda excluído en la prueba por inducción; por ello demostramos

$$\forall n(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$$

¿Se puede extender este método para que sirva no sólo con los conjuntos numerables, sino también con los transfinitos (supernumerables)? La respuesta es afirmativa, lo veremos ahora.

5.1.1. Inducción en un conjunto bien ordenado

Teorema de Inducción Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado. Y sea $E \subseteq X$ tal que:

1. el primer elemento de X es elemento de E.
2. para cada $x \in X$, si $\forall y(y < x \to y \in E)$, entonces $x \in E$.

entonces $E = X$

5.1.2. Inducción en el conjunto de los números naturales

Llamamos ω al conjunto de los números naturales con su ordenación habitual. ω es un conjunto bien ordenado y por tanto vale el teorema de inducción

Teorema de Inducción para ω *(1) Inducción fuerte.*
Sea $X \subseteq \omega$ tal que $(\forall n \in \omega)(n \subseteq X \to n \in X)$, entonces $X = \omega$

(2) Inducción débil.
Sea $X \subseteq \omega$ tal que
(i) $0 \in X$
(ii) $(\forall n \in \omega)(n \in X \to (n+1) \in X)$
entonces $X = \omega$

(3) Expresión de la inducción débil mediante fórmulas.
Sea $\mathcal{P}(x)$ un predicado o propiedad del lenguaje de la teoría de conjuntos específica para los números naturales ω. Si se satisface:
(i) $\mathcal{P}(0)$
(ii) $(\forall n \in \omega)(\mathcal{P}(n) \to \mathcal{P}(n+1))$
entonces $(\forall n \in \omega)(\mathcal{P}(n))$

(4) Expresión generalizada de la inducción débil mediante fórmulas.
Sea $\mathcal{P}(x)$ un predicado o propiedad del lenguaje de la teoría de conjuntos específica para los números naturales ω. Si se satisface:
(i) $\mathcal{P}(n_0)$ para un cierto número natural n_0.
(ii) $(\forall n \geq n_0)(\mathcal{P}(n) \to \mathcal{P}(n+1))$
entonces $(\forall n \geq n_0)\mathcal{P}(n)$

Demostración de (4): (4) Es consecuencia directa del teorema de inducción en conjuntos bien ordenados y el hecho de que $\omega - \{n / \ n < n_0\}$ es un conjunto bien ordenado cuyo primer elemento es n_0.

5.2. Buenos órdenes y ordinales

5.2.1. Comparación de conjuntos bien ordenados: Isomorfismos

Definición Sean $\langle X, \leq \rangle$ y $\langle X', \leq' \rangle$ dos conjuntos bien ordenados. $f : X \longrightarrow X'$ es un *isomorfismo de órdenes* si y sólo si

(i) f es biyectiva

(ii) $x < y \Rightarrow f(x) <' f(y)$, para todo $x, y \in X$

Notación: Escribiremos $\langle X, \leq \rangle \cong \langle X', \leq' \rangle$ o bien $X \cong X'$, o incluso $f : X \cong X'$

Teoremas

1. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado, $Y \subseteq X$ y $f : X \cong Y$. Entonces $x \leq f(x)$, para todo $x \in X$.
2. Sean $\langle X, \leq \rangle$ y $\langle X', \leq' \rangle$ buenos órdenes. Si $\langle X, \leq \rangle \cong \langle X', \leq' \rangle$, entonces el isomorfismo es único.

Observación: El que se trate de un buen orden es esencial en este teorema, no bastaría que el orden fuera lineal.

5.2.2. Segmento

Definición Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado y $a \in X$. Llamamos *segmento* de X determinado por a al conjunto $X_a = \{x \in X \mid x < a\}$

Teoremas

1. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado. No hay ningún isomorfismo de X en un segmento de X.
2. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado y sea $A = \{X_a \mid a \in A\}$. Entonces $\langle X, \leq \rangle \cong \langle A, \subseteq \rangle$.

5.2.3. Ordinal

Definición Un *ordinal* es un conjunto bien ordenado $\langle X, \leq \rangle$ tal que $X_a = a$, para todo $a \in X$

Teoremas

1. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado. Entonces $(\forall x, y \in X)(x < y \leftrightarrow X_x \subset X_y \leftrightarrow x \subset y)$
2. Sea X un ordinal. Si $a \in X$, entonces X_a es un ordinal.

3. Sea X un ordinal. Sea $Y \subseteq X$. Si Y es un ordinal, entonces $Y = X_a$, para algún $a \in X$.
4. Si X e Y son ordinales, entonces $X \cap Y$ es un ordinal.
5. Sean X e Y ordinales. Si $X \neq Y$, entonces uno es un segmento del otro.
6. Si X e Y son ordinales isomorfos, entonces $X = Y$
7. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto bien ordenado tal que para cada $a \in X$, X_a es isomorfo a un ordinal. Entonces X es isomorfo a un ordinal.
8. Cada conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.

5.3. Observaciones acerca de los ordinales

- **Los Ordinales miden la longitud de los conjuntos bien ordenados**

Teorema Si $\langle X, \leq \rangle$ es un conjunto bien ordenado, $Ord(X)$ es el único ordinal isomorfo a X.
Por otra parte, si X e Y son conjuntos bien ordenados, $X \cong Y$ syss $Ord(X) = Ord(Y)$

Esta unicidad nos permite usar a los ordinales como "vara de medir" conjuntos bien ordenados; es decir, $Ord(X)$ es la longitud de X.

- **Inclusión (y pertenencia) bien-ordena a los ordinales**

Orden lineal Hemos demostrado que $\subset$ ordena linealmente a los ordinales. De hecho, también $\in$, pues si X e Y son ordinales,

$$X \subset Y \text{ si y sólo si } X = Y_a (\text{para algún } a \in Y)$$

$$\text{si y sólo si } X = a \text{ (pues } Y_a = a)$$

$$\text{si y sólo si } X \in Y \text{ (pues } a \in Y)$$

Por consiguiente, la relación $\subset$ coincide en los ordinales con la relación $\in$

Nota importante: No decimos que $x \subset y$ y $x \in y$ se den por las mismas razones, ni tan siquiera en los ordinales. Lo que sucede es que siempre tenemos situaciones como ésta:

$$x = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$y = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Aquí $x \in y$ porque

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Mientras que $x \subset y$ porque

$$\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$
$$\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Buen orden La relación $\subset$ sobre los ordinales no sólo es un orden lineal, también es un buen orden.

Demostración: Supongamos que los ordinales no estuvieran bien ordenados mediante $\subset$, habiendo una sucesión

$$\{X(n)\}_{n=0}^{\infty}$$

tal que

$$X(0) \supset X(1) \supset X(2) \supset ...$$

Luego, para cada $n > 0$ se cumple, $X(n) \subset X(0)$.
Por lo tanto, para cada $n > 0$ se cumple, $X(n) \in X(0)$.
Así que

$$\{X(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$$

es una sucesión decreciente infinita de elementos de $X(0)$.

Pero $X(0)$ es un ordinal, está bien ordenado mediante $\subset$ y por lo tanto no puede haber tales cadenas descendentes infinitas.

- **¿Cómo son los ordinales “por dentro”?**

Usaremos letras griegas minúsculas para denotar ordinales. Puesto que el orden es siempre $\subset$ no hace falta especificarlo. Sin embargo, recordaremos siempre que un ordinal no es sólo un conjunto, sino un conjunto y un orden.

Para denotar el orden de los ordinales se usa indistintamente $\alpha < \beta, \alpha \subset \beta$ o $\alpha \in \beta$.

Puesto que los ordinales miden conjuntos bien ordenados, en particular medirán conjuntos finitos. Definiremos a los naturales como ordinales finitos.

Cómo es un ordinal?

Si α es un ordinal, entonces $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$

Ordinales finitos

$\emptyset$	Primer ordinal	Denotación	0
$\{0\} = \{\emptyset\}$	Segundo ordinal	Denotación	1
$\{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	Tercer ordinal	Denotación	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{0, 1, 2, ..., n - 1\}$	Ordinal enésimo+1	Denotación	n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

¿Cúal es el primer ordinal infinito? El primer ordinal infinito es el de los naturales $\{0, 1, 2, ..., n, n + 1, ...\} = \omega$

¿Y luego? Se forma su siguiente $\{0, 1, 2, ..., n - 1, ..., \omega\} = \omega + 1$

Procedimiento general (i) Si α es un ordinal, su *siguiente* es $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$. Un ordinal que es el siguiente de otro ordinal se denomina *ordinal sucesor*

(ii) Si $0, 1, 2, ..., n, n + 1, ..., \omega, \omega + 1, ..., \alpha, \alpha + 1, ...$

son los elementos de un segmento inicial de un ordinal, sin elemento último se forma el ordinal

$$\{0, 1, 2, ..., n, n + 1, ..., \omega, \omega + 1, ..., \alpha, \alpha + 1, ...\}$$

Puesto que un ordinal de esta índole carece de elemento último, se le llama *ordinal límite*. Así que ω es un ordinal límite.

Capítulo 6

La Jerarquía de Zermelo

6.1. Construcción de la Jerarquía

Ahora podemos presentar con rigor la jerarquía de conjuntos de Zermelo Fraenkel, y responder a las preguntas que nos hicimos cuando hablábamos del Universo matemático y se proponía la construcción de los conjuntos de la teoría partiendo de una colección inicial M_0 de objetos dados y construyendo a continuación una colección M_1 de objetos de M_0, después M_2 de objetos de M_0 y de M_1 y así sucesivamente.

1. ¿Cúal será nuestra colección de partida, M_0?.
   Partimos de $M_0 = \emptyset$, el nivel inicial. Lo llamamos $V_0 = \emptyset$

2. ¿Qué conjuntos de objetos de niveles inferiores se toman para formar nuevos niveles en la jerarquía?
   Supóngase que hemos definido ya V_α. ¿Qué conjuntos de miembros de V_α tomaremos para formar $V_{\alpha+1}$?. Consideraremos $\mathfrak{P}(V_\alpha)$ el conjunto potencia o de las partes de V_α, cuyos elementos son los subconjuntos de V_α. Por tanto, dado el nivel V_α (siendo α ordinal sucesor) formamos

   $$V_{\alpha+1} = \mathfrak{P}(V_\alpha)$$

   Y cuándo α es un ordinal límite:

   $$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$$

   Es decir, en estos momentos recopilamos todos los niveles anteriores.

3. ¿ Hasta dónde se extiende esta jerarquía?.
   La jerarquía de conjuntos no tiene fin; siempre se pueden construir nuevos

conjuntos. Para cada ordinal α debe haber un nivel V_α. Sus miembros son conjuntos cuyos elementos están en los niveles previos; en $\bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$

Finalmente, la jerarquía de Zermelo Fraenkel de todos los conjuntos es:

$$V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_a$$

Como se comentó con anterioridad la jerarquía de Zermelo es una buena representación intuitiva de nuestro universo matemático. Sería conveniente que respondiera a todas las expectativas planteadas en apartados precedentes y también, lo cual es extremadamente importante, que el marco axiomático en el que nos movemos; a saber, la teoría de Zermelo Fraenkel, garantizara su construcción. De hecho, se puede ver al revés, se eligieron los axiomas justamente para que nuestra construcción pudiera llevarse a término.

- Se observa en primer lugar que en toda la construcción hay una *operación básica*: formar el conjunto potencia o de las partes de un conjunto. $\mathfrak{P}x$
- Otra de nuestras preocupaciones era que pudieran construirse *sólo* colecciones matemáticas. Esto está garantizado porque empezamos con el $\emptyset$ y llegamos mediante construcciones que no introducen objetos no matemáticos hasta formar el universo

  $$V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_a$$

  que no es un conjunto.
- Finalmente, *todas* las colecciones matemáticas están, porque tenemos el axioma de separación.

6.2. Axiomas involucrados en la construcción de la jerarquía

Hemos ya formulado el axioma de separación y dejaremos para un tratamiento posterior los axiomas de elección y constructibilidad.

¿Cuales son los principios usados en la construcción de la Jerarquía?

Claramente

$$V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_a$$

no es una fórmula del lenguaje de primer orden que estamos usando. En su construcción usamos lo siguiente:

1. Tomamos como operación básica la de partes, $\mathfrak{P}x$. El axioma de las partes de un conjunto

$$\forall A \exists B (\forall x (x \in B \leftrightarrow \forall y (y \in x \rightarrow y \in A))$$

   permite formar un conjunto con todos los subconjuntos de uno dado, A. Este axioma nos permite pasar de V_α a $V_{\alpha+1}$, haciendo $V_{\alpha+1} = \mathfrak{P}(V_\alpha)$.

   ¿Qué sucede cuando α es un ordinal límite?

2. Debemos poder formar la unión de colecciones de conjuntos. El axioma de la unión,

$$\forall A \exists B (\forall x (x \in B \leftrightarrow \exists y (y \in A \wedge x \in y))$$

   dice que dado un conjunto A hay un conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos de A. El axioma de la unión nos permite formar V_α, cuando α es un ordinal límite, haciendo

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$$

   Es decir, $V_\alpha = \bigcup \{V_\beta : \beta < \alpha\}$. Pero, ¿sabemos si $\{V_\beta : \beta < \alpha\}$ es un conjunto?. En realidad, podríamos conseguirlo a partir de $\{\beta : \beta < \alpha\}$ reemplazando cada β por V_β. Para ello necesitaríamos contar con los ordinales y utilizar el axioma del reemplazamiento. Dejemos de momento de lado a los ordinales, supongamos que ya contamos con ellos.

3. El axioma de reemplazamiento dice que si tenemos una fórmula $\varphi(x, y)$ tal que a cada conjunto a le asigna un único conjunto b tal que $\varphi(a, b)$ entonces, a partir de un conjunto A cualquiera podemos definir otro, B, en el que los elementos a de A son reemplazados por los b que cumplen $\varphi(a, b)$

$$\forall x \exists ! y \varphi(x, y) \rightarrow \forall A \exists B \forall y (y \in B \leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \varphi(x, y))$$

   Retomemos la cuestión anterior, ¿Qué necesitamos para poder construir a los ordinales?

4. En primer lugar, necesitamos el conjunto vacío, $\emptyset$. para ello añadimos el axioma que dice que hay un conjunto que carece de elementos

$$\exists B \forall x (x \notin B)$$

5. También necesitamos el axioma de infinitud, que dice que hay un conjunto que contiene al $\emptyset$ y que está cerrado bajo la operación del siguiente

$$\exists B (\emptyset \in B \wedge \forall y (y \in B \rightarrow y \cup \{y\} \in B))$$

Los dos últimos axiomas, afirman la existencia de ciertos conjuntos. Esto contrasta con el resto de los axiomas, que proporcionan reglas mediante las cuales se forman conjuntos a partir de conjuntos existentes. En realidad, el axioma del conjunto vacío no es necesario, pues es demostrable a partir de infinitud y de separación.
¿Faltan más axiomas?

6. El axioma de extensionalidad, que usábamos desde el principio en la teoría básica, expresa el criterio fundamental de la teoría de conjuntos que dice que identificamos los conjuntos que tienen los mismos elementos. No estamos interesados en los predicados que definen a los conjuntos, sino en los que finalmente caen bajo ellos, los que los cumplen. Por otra parte, el principio de extensionalidad nos permite demostrar la unicidad de los conjuntos cuya existencia garantizan otros axiomas.

$$\forall AB(\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

¿Hemos expresado ya que el universo de conjuntos está formado exclusivamente por los elementos de los distintos niveles?

$$V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$$

En realidad, cuando se tiene el resto de los axiomas (1)-(6) y el axioma de separación, se puede demostrar que el principio así expresado equivale al siguiente

7. Axioma de fundación. Dicho principio dice que $\in$ es una relación bien fundada. Lo expresamos así:

$$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

Capítulo 7

Los Axiomas de Elección y Constructibilidad

Los axiomas presentados anteriormente permiten justificar que todos los elementos utilizados en la construcción de la Jerarquía de Conjuntos de Zermelo Fraenquel son conjuntos. Esos axiomas y la teoría de conjuntos que se deriva de ellos se conoce como teoría ZF.

Existen extensiones de la teoría ZF consistentes en añadir uno o varios axiomas a los de esa teoría. Entre todas las extensiones sólo nos ocuparemos ahora de las que se obtienen con dos axiomas en particular. El axioma de la elección y el axioma de constructibilidad.

7.1. Axioma de la elección

- *Axioma de la elección:* $\forall A(\emptyset \notin A \wedge \forall xy(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset) \rightarrow \exists B \forall z(z \in A \rightarrow \exists! v(v \in z \cap B)))$

Este axioma asegura la existencia de un conjunto B obtenido a partir de una colección cualquiera A de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. De cada conjunto de A *elije* un único conjunto para poner en B.

Este axioma no se puede demostrar en la teoría ZF, y si queremos asegurar la existencia de las llamadas funciones de elección o de la buena ordenación de cualquier conjunto debe añadirse a los demás axiomas. La teoría de conjuntos axiomática resultante se conoce con las siglas ZFC (C del inglés Choice), y es la que en realidad se conoce como teoría de Zermelo Fraenkel.

Si ZFC es consistente todo lo que se demuestre en esta teoría será verdadero. Sin embargo, como consecuencia del teorema de Gödel no hay esperanza de poder demostrar la consistencia de la teoría ZFC, ya que para demostrar su consistencia tendríamos que hacer la prueba en una teoría más fuerte que ZFC, cuya consistencia sería aún más difícil de demostrar. Otro teorema de Gödel muestra que si ZFC fuera inconsistente también lo sería ZF. Por tanto sólo es necesario suponer que ZF es consistente para asegurar también que ZFC lo es.

7.1.1. Otras formulaciones del axioma de elección

De entre las numerosas formulaciones del axioma de elección, cabe destacar las siguientes:

1. Para cada relación R hay una función f tal que $f \subseteq R$ y $Dom(f) = Dom(R)$.
   Esta formuación la usamos para demostrar el criterio de exhaustividad para funciones. A saber, que una función $f : A \longrightarrow B$ es exhaustiva si y sólo si hay una función $g : B \longrightarrow A$ que compuesta con ella produce la identidad sobre B.

2. El producto cartesiano de conjuntos no vacíos es no vacío.

3. Para cada conjunto A hay una función f (llamada función de elección) tal que el dominio de f es el conjunto de los subconjuntos no vacíos de A y tal que $f(B) \in B$ para cada $B \subseteq A$.

4. Dado un conjunto A de conjuntos no vacíos y disjuntos, hay un conjunto que tiene un elemento de cada conjunto de A. (Russell pone el famoso ejemplo de los calcetines. Dada una colección infinita de pares de calcetines, el axioma de elección nos permite elegir uno de cada par. El problema se plantea con los calcetines, pero no con los zapatos, podemos elegir el izquierdo de cada par.)

7.1.2. Importancia del Axioma de Elección

1. Equivale al principio del buen orden. $\forall A \exists R(R \text{ bien ordena } A)$.
   Este axioma asegura que es posible definir un buen orden en todo conjunto, y como todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un ordinal, será posible "medir" los conjuntos usando los ordinales.

2. Implica el *Lema de Zorn.* Todo conjunto ordenado en el que cada cadena posea cota superior, tiene elemento maximal.

3. El Lema de Zorn implica el *Principio de Hausdorff.* En todo conjunto ordenado cada cadena puede extenderse a una cadena maximal

7.2. Axioma de Constructibilidad

Cuando se definió la jerarquía de conjuntos de Zermelo Fraenkel $\{V_a/\alpha \in Ord\}$ usamos como noción base la del conjunto de las partes de un conjunto

$$V_{\alpha+1} = \mathfrak{P}(V_\alpha)$$

esto es, $V_{\alpha+1}$ es el conjunto de todos los subconjuntos de V_α. Sin embargo la noción de subconjunto no fue definida en realidad y cuando nos hacemos preguntas como qué es un subconjunto arbitrario del conjunto de los números naturales y cuántos de ellos hay, no es posible responder sin determinar lo que se entiende por subconjunto. Podemos tomar como noción de conjunto la de una colección descriptible por una fórmula expresada en el lenguaje formal de la tería de conjuntos. De esta manera obtendremos los conjuntos necesarios en matemáticas, excepto quizás los conjuntos "indescriptibles" provenientes del axioma de elección. ?? se puede redefinir la jerarquía de conjuntos substituyendo la noción de conjunto de las partes de un conjunto por la de conjunto descriptible de las partes de un conjunto. Indicaremos el nivel $\alpha \in Ord$ de la jerarquía por la nueva notación L_α.

$$L_0 = \emptyset$$

$L_{\alpha+1}$ =todas las colecciones de elementos de L_α que son describibles con fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos)

Y cuándo α es un ordinal límite:

$$L_{\alpha+1} = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$$

Finalmente, la jerarquía constructible de Zermelo Fraenkel de todos los conjuntos es:

$$L = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_a$$

- *Axioma de Constructibilidad:* $L = V$.

Se demuestra que la teoría ZF más el axioma de Constructibilidad garantiza la definición de todos los niveles de la jerarquía constructible. Pero el axioma de Construcibilidad no se demuestra de ZF.

La ventaja de añadir este axioma es que en $ZF + (L = V)$ es que podemos definir qué es un subconjunto y efectivamente construir la jerarquía, pero en esta teoría el axioma de la Elección se deriva como un teorema.

Teorema: En la teoría $ZF+(L = V)$, cada conjunto puede ser bien ordenado.

La teoría usualmente tomada como básica es ZFC. Sin embargo es posible obtener muchos resultados matemáticos sólo con ZF. Por otro lado la teoría de conjuntos constructible puede parecer más natural y algunos matemáticos lo hacen, aunque la jerarquía de conjuntos más aceptada es V y el axioma de Constructibidad muy discutido, como también lo sigue siendo el de la Elección en muchos autores.

Capítulo 8

Ejercicios

8.1. Igualdad, Inclusión y Conjunto vacío

Demuéstrese los siguientes teoremas de ZF.

1. $\neg\forall AB\ ((A \subseteq B) \vee (B \subseteq A))$
2. $\forall A\ ((A \subseteq \emptyset) \leftrightarrow (A = \emptyset))$
3. $\neg\forall AB\ ((A \subseteq B) \rightarrow (B \subseteq A))$
4. $\neg\forall AB\ ((A \subseteq B) \rightarrow (\neg(B \subseteq A)))$
5. $\forall ABC\ (((A \subseteq B) \wedge (B \subset C)) \rightarrow (A \subset C))$
6. $\forall A\ (\neg(\ A \subset A))$

8.2. Operaciones: Algebra de conjuntos

Pruébese las siguientes propiedades en ZF.

1. $\forall ABC\ (((A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)) \rightarrow ((A \cup B) \subseteq C)))$
2. $\forall ABC\ (((C \subseteq A) \wedge (C \subseteq B)) \rightarrow (C \subseteq (A \cap B)))$
3. $\forall ABC\ ((A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C))$
4. $\forall ABC\ ((A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C))$
5. $\forall AB\ ((A - B) \cup B = A \cup B = A \cup (B - A))$
6. $\forall AB\ ((A - B) \cap B = \emptyset)$
7. $\forall ABC\ (A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C))$
8. $\forall ABC\ ((A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C))$

9. $\forall AB\ ((A \subseteq B) \leftrightarrow (A \cup (B - A) = B))$

10. $\forall AB\ (A \cap B = A - (A - B))$

8.3. Clases Unitarias, Pares y Díadas

Demuéstrese que los siguientes axiomas se derivan de los axiomas.

1. $\forall xy\ ((\{x\} \in \{x, y\}) \rightarrow (\{x\} = y))$

2. Definamos $\langle [x, y] \rangle = \{\{x, \emptyset\}, \{y, \{\emptyset\}\}\}$. Demostrad lo siguiente: $\forall xyzv(\langle [x, y] \rangle = \langle [z, v] \rangle \rightarrow (x = z) \wedge (y = v))$

3. ¿Es siempre verdad que si $\{x, y, z\} = \{x, y.v\}$ entonces $z = v$?

8.4. Conjunto Potencia (o Conjunto de las Partes de un Conjunto)

1. $\forall AB\ ((A \subseteq B) \rightarrow (\mathfrak{P}A \subseteq \mathfrak{P}B))$

2. $\mathfrak{P}\emptyset = \{\emptyset\}$

3. $\mathfrak{P}\{\emptyset\} = \{\emptyset\,\{\emptyset\}\}$

4. $\mathfrak{P}\mathfrak{P}\emptyset = \{\emptyset\,\{\emptyset\}\}$

5. $\forall AB\ (\mathfrak{P}(A - B) \subseteq ((\mathfrak{P}A - \mathfrak{P}B) \cup \{\emptyset\}))$

6. $\forall A\ (\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}\mathfrak{P}A)$

7. $\forall AB\ ((\mathfrak{P}A = \mathfrak{P}B) \rightarrow (A = B))$

8. $\forall xyA\ ((x \in A\ \wedge\ y \in A) \rightarrow (\langle x, y \rangle \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}A))$

8.5. Gran Unión y Gran Intersección

Demuéstrese los siguientes teoremas.

1. $\forall \mathfrak{A}xy\ ((\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathfrak{A}) \rightarrow ((\{x\}, \{x, y\} \in \bigcup \mathfrak{A})\ \wedge\ (x, y \in \bigcup\bigcup \mathfrak{A})))$

2. $\forall xy\ (\bigcap \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{x\})$

3. $\forall xy\ (\bigcup\bigcap \{\{x\}, \{x, y\}\} = x)$

4. $\forall xy\ (\bigcap\bigcup \{\{x\}, \{x, y\}\} = x \cap y)$

5. $\forall xy\ (\bigcap \langle x, y \rangle = \{x\})$

6. $\forall xy\ (\bigcup\bigcap\langle x, y\rangle = x)$

7. $\forall xy\ (\bigcap\bigcup\langle x, y\rangle = x \cap y)$

8. $\forall AB\ ((A \subseteq B) \to (\bigcup A \subseteq \bigcup B))$

9. $\forall \mathfrak{A} B\ ((\forall A\ ((A \in \mathfrak{A}) \to (A \subseteq B))\ \to\ (\bigcup \mathfrak{A} \subseteq B))$

10. $\forall A\ (A \subseteq \mathfrak{P}(\bigcup A))$

11. $\forall AB\ ((A \in B) \to (\mathfrak{P} A \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}\bigcup B))$

12. $\forall A \mathfrak{B}\ ((\mathfrak{B} \neq \emptyset)\ \to\ (A \cup (\bigcap \mathfrak{B}) = \bigcap\{A \cup x \mid x \in \mathfrak{B}\}))$

8.6. Producto Cartesiano

Pruébese que son verdaderas las propiedades siguientes en la teoría ZF.

1. $\exists ABC\ (A \cup (B \times C) \neq (A \times B) \cup (A \times C))$

2. $\forall ABC\ (((A \times B = A \times C) \wedge (A \neq \emptyset)) \to (B = C))$

3. $\forall A \mathfrak{B}\ (A \times \bigcup \mathfrak{B} = \bigcup\{A \times z \mid z \in \mathfrak{B}\})$

4. $\forall AB\ (A \times B = B \times A \leftrightarrow A = B\ \vee\ A = \emptyset\ \vee\ B = \emptyset)$

5. $\forall A \mathfrak{B}\ (A \times \bigcap \mathfrak{B} = \bigcap\{A \times z \mid z \in \mathfrak{B}\})$

6. $\forall AB\ ((\bigcap(A \times B) \neq \emptyset) \to (\exists x\ (A = \{x\})))$

8.7. Relaciones Binarias

Demuéstrese que las siguientes propiedades sobre relaciones son teoremas de ZF.

1. $\forall R\ ((\neg(R \text{ es una relación}))\ \to\ (R \nsubseteq \mathit{Dom}\ R \times \mathit{Rang}\ R)))$

2. $\exists RS\ (\mathit{Dom}\ (R \cap S) \neq (\mathit{Dom}\ R \cap \mathit{Dom}\ S))$

3. $\forall RS\ (\mathit{Rang}\ (R \cap S) \subseteq (\mathit{Rang}\ R \cap \mathit{Rang}\ S))$

4. $\exists RS\ (\mathit{Rang}\ (R \cap S) \neq \mathit{Rang}\ R \cap \mathit{Rang}\ S)$

5. $\exists RS\ (\mathit{Rang}\ (R - S) \neq \mathit{Rang}\ R - \mathit{Rang}\ S)$

6. $\forall RS\ (\mathit{Rang}\ (R - S) \supseteq (\mathit{Rang}\ R - \mathit{Rang}\ S))$

7. $\forall RS$ ((R es relación $\wedge S$ es relación $\wedge \forall xy(\langle x,y\rangle \in R \leftrightarrow \langle x,y\rangle \in S)) \rightarrow R = S)$

8. $\forall RS$ (R es relación $\wedge$ S es relación $\wedge \forall xy(\langle x,y\rangle \in R \rightarrow \langle x,y\rangle \in S)) \rightarrow R \subseteq S)$

8.8. Relación Inversa, Producto Relativo y Restricción

1. $\forall AB\ ((A \cup B)^{-1} = A^{-1} \cup B^{-1})$
2. $\forall AB\ ((A \cap B)^{-1} = A^{-1} \cap B^{-1})$
3. $\forall AB\ ((A \times B)^{-1} = B \times A)$
4. $\forall AB$ (A/B es una relación)
5. $\forall AB\ (Dom(A/B) \subseteq Dom\ A)$
6. $\forall ABCD\ (\ ((A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D)) \rightarrow (A/C \subseteq B/D))$
7. $\forall ABC\ (A/(B \cup C) = (A/B) \cup (A/C))$
8. $\forall ABC\ (A/(B \cap C) \subseteq (A/B) \cap (A/C))$
9. $\exists ABC\ (A/(B \cap C) \neq (A/B) \cap (A/C))$
10. $\forall ABC\ (\ (A/(B - C)) \supseteq ((A/B) - (A/C))\ )$
11. $\forall AR\ (R \restriction A = (R \cap (A \times Rec\ R))\ )$
12. $\forall ABR\ (\ (A \subseteq B)\ \rightarrow\ ((R \restriction A) \subseteq (R \restriction B))\ )$
13. $\forall ABR\ (\ R \restriction (A \cup B) = ((R \restriction A) \cup (R \restriction B))\ )$
14. $\forall ABR\ (\ R \restriction (A \cap B) = ((R \restriction A) \cap (R \restriction B))\ )$
15. $\forall RSA\ (\ (R/S) \restriction A = ((R \restriction A)/S)\ )$
16. $\exists ABR\ (\ ((R \restriction A) \subseteq (R \restriction B))\ \wedge\ \neg(A \subseteq B)\ )$

8.9. Imagen bajo una Relación y Relación de Identidad

1. $\forall RAB\ ((A \subseteq B) \rightarrow (R\,[A] \subseteq R\,[B]))$
2. $\forall RAB\ ((R\,[A] \cap B) \subseteq (R\left[A \cap R^{-1}\,[B]\right])$
3. $\forall RA\ (R^{-1}\,[A] = Dom\ (R \cap (Dom\ (R \times A)))$
4. $\forall R$ ((R es una relación) $\leftrightarrow ((I_{Dom\ R})/R = R))$
5. $Dom\ (I_A = A = Rang\ I_A = Camp\ I_A)$

8.10. Propiedades de ciertas relaciones

1. $\forall R$ ((R es reflexiva) $\leftrightarrow$ ($I_{Camp\ R} \subseteq R$))
2. $\forall R$ ((R es simétrica) $\leftrightarrow$ (($(R^{-1})^{-1} = R^{-1}$))
3. $\forall R$ ((R es transitiva) $\leftrightarrow$ ($R/R \subseteq R$))
4. $\forall R$ ((R es irreflexiva) $\leftrightarrow$ ($R \cap I_{Camp\ R} = \emptyset$))
5. $\forall R$ ((R es asimétrica) $\leftrightarrow$ ($R \cap R^{-1} = \emptyset$))
6. $\forall R$ ((R es antisimétrica) $\leftrightarrow$ ($R \cap R^{-1} \subseteq I_{Dom\ R}$))
7. $\forall R$ ((R esta conectada) $\leftrightarrow$ ((($Camp\ R \times Camp\ R$) $- I_{Camp\ R}$) $\subseteq$ ($R \cup R^{-1}$)))
8. $\forall R$ ((R esta fuertemente conectada) $\leftrightarrow$ (($Camp\ R \times Camp\ R$) $\subseteq$ ($R \cup R^{-1}$)))
9. $\forall R$ ((R es euclidea) $\leftrightarrow$ ((R^{-1}/R) $\subseteq R$))
10. $\forall R$ ((R es incestuosa) $\leftrightarrow$ ((R^{-1}/R) $\subseteq$ (R/R^{-1})))

8.11. Relaciones de Equivalencia

Pruébese que las siguientes propiedades sobre relaciones de equivalencia son teoremas de ZF:

1. $\forall R$ ((R es una relación de equivalencia) $\rightarrow$ (($\forall xy(x, y \in CampR) \rightarrow$ ((($[x]_R = [y]_R$) $\vee$ ($[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$))))
2. $\forall R$ ((R es una relación de equivalencia) $\leftrightarrow$ ((R/R^{-1}) $= R$))

8.12. Relaciones de Orden

1. $\forall R$ ((R es un orden lineal) $\rightarrow$ (R^{-1} es un orden lineal))
2. Sea $\langle A, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Existe un conjunto Y de subconjuntos de A tal que $\langle A, \leq \rangle \cong \langle Y, \subseteq \rangle$

8.13. Funciones, Composición

Demuéstrese los siguientes teoremas sobre funcciones en ZF.

1. $\emptyset$ es una función
2. $\forall fg$ ((f es función $\wedge$ g es función $\wedge$ $Domf = Domg$ $\wedge$ $\forall x((x \in Domf) \rightarrow (f(x) = g(x)))$) $\rightarrow$ $f = g$)

3. $\forall fgA\ (((f \circ g) \upharpoonright A) = (f \circ (g \upharpoonright A)))$

4. $\forall f$ ((f es función $\wedge$ f^{-1} es función) $\rightarrow (f \circ f^{-1} = I_{Dom\ f^{-1}}))$

5. $\forall f$ ((f es función $\wedge$ f^{-1} es función) $\rightarrow$ $((\forall x((x \in Dom f)) \rightarrow ((f^{-1} \circ f)(x) = x)))$

6. $\forall fgh\ ((f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h))$

7. $\forall fg$ ((f es inyectiva $\wedge\ g \subseteq f) \rightarrow$ (g es inyectiva))

8. $\forall fg$ ((f es inyectiva $\wedge$ g es inyectiva $\wedge\ Dom\ f\ \cap Dom\ g = \emptyset\ \wedge\ Rang\ f \cap Rang\ g = \emptyset) \rightarrow (f \cup g$ es inyectiva))

9. $\forall fg$ ((f es inyectiva $\wedge$ g es inyectiva) $\rightarrow (f \cap g$ es inyectiva))

8.14. Funciones de A en B

Demostrad lo siguiente:

1. $\forall f$ ((f es función $\wedge A \subseteq Dom f) \rightarrow (f \upharpoonright A$ es función $\wedge\ f : A \longrightarrow f[A]$ es exhaustiva))

2. $\forall f\ ((f : A \longrightarrow B\ \wedge\ A \neq \emptyset) \rightarrow$ ((f es inyectiva) $\leftrightarrow$ $(\exists g\ (g : B \longrightarrow A\ \wedge\ g \circ f = I_A))))$

3. $\forall f\ ((f : A \longrightarrow B\ \wedge\ A \neq \emptyset) \rightarrow$ ((f es exhaustiva) $\leftrightarrow$ $(\exists g\ (g : B \longrightarrow A\ \wedge\ f \circ g = I_B))))$

8.15. Inducción

Resuélvanse los siguients ejercicios sobre induccuón:

Ejercicio 1. Hágase una conjetura para responder a las siguientes preguntas e inténtese demostrarla por inducción.
(a) Qué número es mayor : 2^{n-1} o $n!$?
(b) Qué número es mayor: 2^n o n^2 ?
(c) Cuántos subconjuntos de 2 elementos tiene un conjunto de $n \geq 2$ elementos?
(d) Cuántos subconjuntos de 3 elementos tiene un conjunto de $n \geq 3$ elementos?
(e) Cuántos subconjuntos de k elementos tiene un conjunto de $n \geq k$ elementos?

Indicación: Compruébese para cada conjetura cuál es la situción para *n=1, n=2, n=3, n=4, n=5, n=6* o incluso para algún valor más si fuera necesario. Una vez establecida la conjuetura la demostración por inducción tiene dos fases:

(i) probar que la conjetura es válida para el menor de los números naturales n_0 a que hace referencia (en (a) $n_0 = 1$,(b) y (c) $n_0 = 0$, pero en (c) $n_0 = 2$, en (d) es $n_0 = 3$ y en (e) es $n_0 = k$), esta fase habrá sido ya probada en las comprobaciones para enunciar la conjetura; (ii) suponiendo que la conjetura es cierta para un número natural arbitrario $p \geq n_0$ probar que también lo es para $p + 1$.

Ejemplo: (a) Primero comprobamos para los valores de n menores cuál es la situación respecto a la pregunta que nos hacemos:

Para $n = 1$: por un lado $2^{n-1} = 2^0 = 1$ por otro lado $n! = 1! = 1$.
Para $n = 2$: por un lado $2^{n-1} = 2^1 = 2$ por otro lado $n! = 2! = 2 \cdot 1 = 2$.
Para $n = 3$: por un lado $2^{n-1} = 2^2 = 4$ por otro lado $n! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
Para $n = 4$: por un lado $2^{n-1} = 2^3 = 2$ por otro lado $n! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
Por tanto nuestra conjetura es $\mathcal{P}(n) = 2^{n-1} \leq n!$ para todo $n \geq 1$.
Ahora la demostramos por inducción:
(i) La conjetura se cumple para $n_0 = 1$, esto es $\mathcal{P}(1)$ es cierta.

(ii) Suponemos que la conjeura es cierta para un cierto $p \geq 1$, esto es $\mathcal{P}(p) = 2^{p-1} \leq p!$ es cierta (hipótesis de inducción). Ahora demostraremos que también se debe cumplir para $p+1$ esto es, que $\mathcal{P}(p+1) = 2^{(p+1)-1} \leq (p+1)!$ es cierta.

Demostración: $2^{(p+1)-1} = 2^p = 2^{p-1} \cdot 2 \leq p! \cdot 2$ (usamos que $2^{p-1} \leq p!$, la hipótesis de inducción). Por otro lado $p \geq 1$ y por tanto $p + 1 \geq 2$, ?? que $p! \cdot 2 \leq p! \cdot (p+1) = (p+1)!$. Como se quería demostrar.

Ahora, aplicando el principio de inducción para los números naturales: $2^{n-1} \leq n!$ para todo $n \geq 1$

Soluciones: las soluciones a las conjeturas del ejercicio 1 son:
(b) $2^n \geq n^2$ para todo número natural excepto para $n = 3$. Aquí podemos demostrar los casos particulares $n = 0, n = 1, n = 2, n = 4$ y de mostrar que la conjetura es válida para $n \geq 4$ por inducción.
(c) Un conjunto de $n \geq 2$ elementos tiene $\dfrac{n(n-1)}{2}$ subconjuntos de 2 elementos.
(d) Un conjunto de $n \geq 3$ elementos tiene $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ subconjuntos de 3 elementos.
(e) Un conjunto de $n \geq k$ elementos tiene $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$ subconjuntos de k elementos.

Ejercicio 2. Los siguientes resultados de la aritmética natural son ciertos para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuéstrese por inducción.
(a) $2^{2n} - 1$ es múltiplo de 3.
(b) $n^2 - n$ es par.
(c) $n^3 - n$ es múltiplo de 6.
(d) $n^5 - n$ es múltiplo de 30.

(e) $n^p - n$ es múltiplo de p para todo número primo p (Teorema pequeño de Fermat).

Ejercicio 3. Demuéstrese que la *expresión de la inducción débil mediante fórmulas generalizada (4)* es equivalente a:

Sea $\mathcal{P}(x)$ un predicado o propiedad del lenguaje de la teoría de conjuntos específica para los números naturales ω. Si se satisface:
(i) $\mathcal{P}(n_0)$
(ii) $(\forall k \geq n_0)(\mathcal{P}(n_0) \wedge \mathcal{P}(n_0+1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(k-1) \rightarrow \mathcal{P}(k))$
entonces $(\forall n \geq n_0)\mathcal{P}(n)$.

Indicación: considérese $\mathcal{Q}(k) = \mathcal{P}(n_0) \wedge \mathcal{P}(n_0+1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(k)$.

Ejercicio 3. Utilícese la forma alternativa del principio de inducción del ejercicio anterior para demostrar que todo *árbol* formado por n aristas y m vértices verifica: $m = n+1$ (tómese $n_0 = 1$). (Un *árbol* es un conjunto de puntos (los vértices) unidos por segmentos (las aristas) que no tiene ciclos y de manera que siempre hay un camino entre dos vértices).

Solución: Consideremos $\mathcal{P}(n)$: si un árbol tiene n aristas entonces tiene $n+1$ vértices. Queremos demostrar que $\mathcal{P}(n)$ es cierta para todo $n \in \omega$.
(i) $\mathcal{P}(1)$ es cierto: un árbol con una arista tiene dos vértices.
(ii) Supongamos que $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \ldots, \mathcal{P}(k-1)$ son ciertas (hipótesis de inducción). Queremos probar que entonces $\mathcal{P}(k)$ también es cierta. Consideremos un árbol con k aristas. Si le quitamos una arista cualquiera, obtenemos dos árboles con k_1 y k_2 aristas tal que $k_1 + k_2 = k - 1$ (por tanto con $k_1, k_2 \leq k-1$). Aplicando la hipótesis de inducción, los dos árboles más pequeños tienen k_1+1 y k_2+1 vértices respectivamente. Como al quitar una arista no se ha variado el número de vértices, el arbol inicial tenía $k_1+1+k_2+1 = k+1$ vértices. Por tanto $\mathcal{P}(k)$ es cierta.
Por el principio d inducción, $\mathcal{P}(n)$ es cierta para todo $n \geq 1$.

Ejercicio 5. Considérese la siguiente utilización del principio de inducción:
Demostraremos por inducción que todo ser humano tiene el mismo nombre. En particular, probaremos que dada una colección de n personas, para cualquier $n \in \omega$, todas las personas tienen el mismo nombre.
La primera etapa es trivial, porque si $n = 1$ cualquier persona tiene el mismo nombre que ella misma.
La hipótesis de inducción es que en toda colección de k personas, todas tienen el mismo nombre.
Ahora consideremos una colección de $k+1$ personas. Hacemos que marche una de estas personas. Por la hipótesis de inducción, las otras k personas tienen todas el mismo nombre. Ahora cambiamos la persona que está fuera por una

de estas k personas. Volvemos a obtener un grupo de k personas, que por la hipótesis de inducción, tienen el mismo nombre. Por tanto la persona que acaba de entrar se llama igual que el resto. ?? las $k+1$ personas tienen el mismo nombre.

Dónde falla la demostración?

Solución: Consideremos la afirmación $\mathcal{P}(n) =$ *en toda colección de n personas, todas tienen el mismo nombre.*

- $\mathcal{P}(1)$ es cierto (a menos que consideremos que no iene sentido, pero eso no cambia nada).

- Se puede ver fácilmente que $\mathcal{P}(2)$ no es cierta.

- También escierto que, para $k \geq 2$, si $\mathcal{P}(k)$ es cierta entonces $\mathcal{P}(k+1)$ es cierta. Esta parte del razonamiento no tiene ningún error. Pero se está suponiendo que hay 2 o más personas en la sala (es decir que $k \geq 2$). Por tanto, aunque $\mathcal{P}(1)$ sea cierta, no sirve de nada, poque la inducción debería comenzar a partir de $\mathcal{P}(2)$ que no es cierta.

Capítulo 9

Bibliografía

1. Devlin, K. **The Joy of Sets.** Springer-Verlag. New York. 1993.
2. Enderton, H. **Elements of Set Theory.** Academic Press. New York. 1977
3. Halmos, P. **Naive Set Theory.** Springer-Verlag. New York. 1974.
4. Suppes, P. **Axiomatic Set Theory.** Dover. New York. 1972.